

# Soluciones Viscosas de Problemas Elípticos

*καφεηνάριο*



Doctorado en Matemática en consorcio PUCV-UTFSM-UV

3 de noviembre de 2023

- 1 Historia
- 2 Soluciones Viscosas para ecuaciones elípticas
- 3 Motivación de la Solución viscosa
  - Resultado de Unicidad en dominios abiertos y acotados
- 4 Bibliografía

- ) La ecuación dada mas adelante es un ejemplo de una ecuación diferencial parcial que surge en muchas áreas diferentes de la física y las matemáticas y, por lo tanto, tiene una gran importancia en la ciencia. Originalmente, fue derivado por William Rowen Hamilton. Jacobi demostró más tarde en sus artículos ajustes matemáticos significativos a la ecuación.
- ) En los años 80, se desarrolló la nueva noción de solución viscosa para la ecuación de Hamilton-Jacobi y se extendió a una clase más amplia de ecuaciones diferenciales parciales. Las primeras ideas sobre esta noción más débil de soluciones aparecieron en el artículo de Evans al aplicar el método de la desaparición de la viscosidad a la ecuación, sin embargo, la definición exacta fue dada más tarde por Crandall y Lions, junto con algunas propiedades muy importantes.

Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un conjunto abierto.

Se considera la ecuación elíptica de primer orden no lineal,

$$\begin{cases} F(x, u(x), Du(x)) = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

donde el Hamiltoniano  $F$  es la aplicación  $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$  continua y  $g \in C(\partial\Omega)$ .

**Propósito.** Estudiar el problema de existencia para la ec. elíptica en dominios generales. Dónde:

- i) La función desconocida  $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ .
- ii)  $Du = D_x u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$  es el gradiente de  $u$ .

**Cómo resolver este tipo de problemas?** Al ser  $F$  continua podemos introducir una gran variedad de problemas.

**Solución Clásica.** Si reemplazo mi función en  $F$ , calculo su derivada y  $F$  evaluado en estos términos me da cero.

### Ejemplo 1

Considere  $\Omega = (0, 1)$ ,  $F(x, u, u', u'') = u''$  y

$$\begin{cases} u'' = 0 & \text{en } \Omega, \\ u(0) = a, \quad u(1) = b, & \text{con } a, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Solución.**

$$u(x) = C_1x + C_2, \quad u(0) = C_2 = a \quad u(1) = C_1 + C_2 = b$$

Luego,

$$u(x) = (b - a)x + a = bx + (1 - x)a \in C^2(\Omega) \text{ (Solución clásica) } .$$

**Siempre se pueden obtener soluciones así de regulares?**

## Ejemplo 2

Ahora, se considera  $\Omega = (0, 1)$ ,  $F(x, u, u') = |u'| - 1$  y considere el problema

$$\begin{cases} |u'(x)| = 1 & \text{en } \Omega, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

**Tiene solución?** Ya no podemos encontrar una función en el sentido clásico.  
**Por qué?**

$$u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1. \text{ Pero, } u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

$$u(x) = x - 1 \Rightarrow u'(x) = 1. \text{ Pero, } u(0) = -1, \quad u(1) = 0.$$

Por absurdo, suponga que existe una función  $u \in C^1(\Omega)$  solución. Así, por el Teorema de valor medio existe un  $x_0 \in \Omega$  tal que

$$u'(x_0) = \frac{u(1) - u(0)}{1 - 0} = 0$$

luego, el problema no tiene solución en el sentido clásico.

**Solución débil.** No cumple necesariamente con la regularidad requerida.

### Ejemplo 3

Consideremos  $I = (0, 1)$ ,  $F(x, u, u'') = -u'' + u - f$  y considere el problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en } I, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

con  $f \in C(\bar{I})$ . Encontremos condiciones sobre  $f$  para que exista solución clásica para el problema.

**Solución.**

#### 1. Noción de solución débil.

Para aplicar la integración por partes se necesita que  $u \in C^2(\bar{I})$ . Sea  $\varphi \in C^2(I)$  tal que  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \int_I -u'' \varphi dx + \int_I u \varphi dx &= \int_I f \varphi dx \\ -u' \varphi \Big|_0^1 + \int_I u' \varphi' dx + \int_I u \varphi dx &= \int_I f \varphi dx \end{aligned}$$

$$\int_I u' \varphi' dx + \int_I u \varphi dx = \int_I f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^2(I).$$

Por densidad ( $C_0^\infty(I)$  es denso en  $H_0^1(I)$ ), obtenemos la formulación débil: Encontrar  $u \in H_0^1(I)$  tal que

$$\int_I u' v' dx + \int_I u v dx = \int_I f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

**Observación:** Como  $u \in C^2(\bar{I})$  con  $u = 0$  sobre  $\partial I$ , podemos considerar  $u \in H_0^1(I)$ .

## 2. Existencia de soluciones débiles.

Depende del teorema de existencia y unicidad por ejemplo: Teorema Lax-Milgram, Teorema de Stampacchia, Teoría de Puntos Críticos.

De hecho, vía Teorema de Lax-Milgram, se tiene que existe un único  $u \in H_0^1(I)$  tal que

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H_0^1(I),$$

lo que es equivalente a decir que existe un único  $u \in H_0^1(I)$  que resuelve la formulación débil.

### 3. Regularidad de las soluciones débiles.

Dado que  $f \in C(\bar{I})$ , con  $I$  acotado, se tiene que  $f \in L^2(I)$  y como  $u \in H_0^1(I)$ , se sigue del Teorema de regularidad de soluciones para el problema de Dirichlet que  $u \in H^2(I)$ .

Por el Teorema de desigualdades generales de Sobolev, se concluye, vía representante continuo de  $u$  que  $u \in C^1(\bar{I})$ .

Ahora, desde la formulación variacional y usando la definición de derivada débil ( $u \in H^2(I)$ ), se tiene que

$$\begin{aligned}\int_I u' \varphi' dx + \int_I u \varphi dx &= \int_I f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^2(I) \\ \int_I (-u'' + u - f) \varphi dx &= 0, \quad \forall \varphi \in C_0^2(I).\end{aligned}$$

Como  $u'', u, f \in L_{loc}^1(I)$ , se sigue que

$$-u'' + u - f = 0 \text{ c.t.p en } I \Leftrightarrow u'' = f - u \text{ c.t.p en } I,$$

con  $f \in C(\bar{I})$  y  $u \in C^1(\bar{I})$  de manera que podemos identificar  $u''$  con una función continua uniforme y así  $u \in C^2(\bar{I})$ .

#### 4. Recuperación solución clásica.

Teniendo que  $-u'' + u - f = 0$  c.t.p en  $I$ , como  $f \in C(\bar{I})$  y  $u \in C^2(\bar{I})$ , realmente se tiene que

$$-u'' + u - f = 0 \quad \text{en } I.$$

Por otro lado como la solución  $u$  del problema pertenece a  $C^2(\bar{I}) \cap H_0^1(I)$ , por el Teorema de Traza cero, se concluye que

$$u = 0 \quad \text{sobre } \partial I.$$



Las características que deseamos en una teoría de soluciones débiles son las siguientes:

- ) **Consistencia:** Las soluciones clásicas satisfacen los criterios suficientes para ser soluciones débiles. Además, una solución débil con suficientes derivadas es a su vez clásica.
- ) **Estabilidad:** El límite de una sucesión de soluciones hereda la ecuación.
- ) **Unicidad:** Cualesquiera dos soluciones débiles con el mismo dato de borde son iguales.
- ) **Existencia:** Dado un dato de borde existe una solución.
- ) **Regularidad:** Las soluciones débiles son clásicas.

**Vanishing Viscosity.** Históricamente, la teoría de soluciones viscosas toma su nombre del método vanishing viscosity para aproximar ecuaciones de primer orden. En este sentido la estabilidad juega un rol fundamental para poder identificar límites de familias de problemas que en algún sentido deberían aproximar alguna ecuación de interés. Por ejemplo. Se puede probar que  $u_\varepsilon$  de

$$|u'(x)| - \varepsilon u''(x) = 1 \text{ for } x \in (-1, 1)$$

satisfaciendo  $u(-1) = u(1) = 0$  es

$$u_\varepsilon(x) = 1 - |x| - \varepsilon \left( e^{-\frac{1}{\varepsilon}|x|} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \right).$$

En este caso,  $|u - u_\varepsilon| \leq C\varepsilon$ , donde  $u(x) = 1 - |x|$  es la solución viscosa de  $|u'(x)| = 1$  en  $(-1, 1)$  con  $u(-1) = u(1) = 0$ .

**Solución viscosa.** (Crandall-Lions 1981) Se presenta la teoría de tipos especiales de soluciones débiles, llamadas soluciones viscosas, en el que se mantienen la consistencia en el sentido de las soluciones clásicas, la unicidad y algunas otras propiedades.

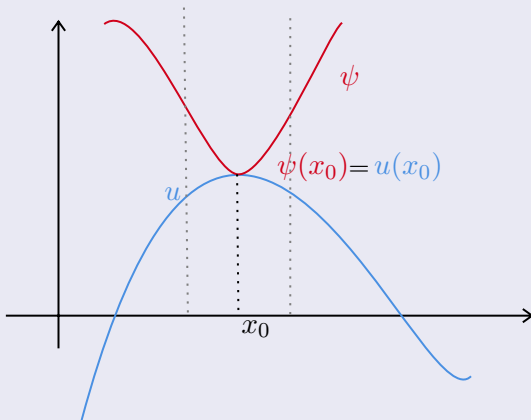
## Motivación.

Suponga que  $u \in C^1(\Omega)$  es una solución clásica de la EDP

$$F(x, u(x), Du(x)) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad (2)$$

donde  $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$  es continua con respecto a todas las variables.

Bajo estos supuestos, suponga que para algún  $x_0 \in \Omega$ ,  $u$  puede ser "tocada desde arriba" por alguna función  $\psi \in C^1(\Omega)$  en  $x_0$ . Es decir que la diferencia tiene un máximo (local) que se desvanece en una vecindad de  $x_0$ .



Se tiene que  $\psi(x) \geq u(x)$ ,  $\forall x \in B(x_0, r) \subset \Omega$  y  $\psi(x_0) = u(x_0)$ .

En resumen, se tiene que

$$(u - \psi)(x) \leq (u - \psi)(x_0), \quad \forall x \in B(x_0, r) \subset \Omega. \quad (3)$$

De (3), se tiene que  $x_0$  es un punto máximo local, entonces

$$D(u - \psi)(x_0) = 0 \text{ en } \mathbb{R}^N.$$

Usando el hecho que  $u$  es solución de (2) y de la última expresión, se ve que

$$\begin{aligned} 0 &= F(x_0, u(x_0), Du(x_0)) \\ &= F(x_0, u(x_0), D\psi(x_0)). \end{aligned}$$

Se concluye que dado  $u$  solución de (1), se tiene que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } u - \psi \text{ tiene un máximo local en el punto } x_0 \in \Omega, \\ \text{entonces } F(x_0, u(x_0), D\psi(x_0)) = 0. \end{array} \right.$$

**Observación:** La motivación anterior ha utilizado el hecho que  $u \in C^1(\Omega)$  es solución clásica de la EDP (2) pero no depende de la existencia de  $Du$ !!.

## Definición 1

Una función  $u \in C(\Omega)$  es una solución viscosa de (2) con  $F$  continua, si y solo si, para todo  $\psi \in C^1(\Omega)$ ,

$$i) \left\{ \begin{array}{l} \text{si } u - \psi \text{ tiene un máximo local en el punto } x_0 \in \Omega, \\ \text{entonces } F(x_0, u(x_0), D\psi(x_0)) \leq 0. \end{array} \right.$$

y

$$ii) \left\{ \begin{array}{l} \text{si } u - \psi \text{ tiene un mínimo local en el punto } x_0 \in \Omega, \\ \text{entonces } F(x_0, u(x_0), D\psi(x_0)) \geq 0. \end{array} \right.$$

Además, decimos que  $u$  es subsolución viscosa (resp. supersolución) si, y solo si, verifica  $i)$  (resp.  $ii)$ ).

## Observación 1

- Toda solución viscosa es continua.
- Otras referencias definen la solución viscosa usando subdiferencial y superdiferencial.

**Se puede probar que:**

Si  $u \in C(\Omega)$  es subsolución viscosa (resp. supersolución) de (2) si, y solo si,  $v = -u$  es supersolución viscosa (resp. subsolución) de

$$-F(x, -v, -Dv) = 0 \text{ en } \Omega.$$

**Consistencia.** Queremos que la noción de solución viscosa sea consistente con la de solución clásica. Más precisamente, si  $u \in C^1(\Omega)$  es una solución de (2) en el sentido clásico, entonces también debería ser una solución en el sentido viscoso, como muestra la siguiente proposición.

### Proposición 1

*Sea  $u \in C^1(\Omega)$ . Entonces,  $u$  es una subsolución viscosa de (2) si, y solo si,*

$$F(x, u(x), Du(x)) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

### Demostración.

Primero, suponga que se cumple la desigualdad. Sea  $\psi \in C^1(\Omega)$  una función test y  $x_0 \in \Omega$  un punto máximo local de  $u - \psi$ . Entonces,

$$Du(x_0) = D\psi(x_0) \text{ en } \mathbb{R}^N.$$

En consecuencia, usando la expresión anterior, se sigue que

$$0 \geq F(x_0, u(x_0), Du(x_0)) = F(x_0, u(x_0), D\psi(x_0)).$$

Por lo tanto,  $u$  es subsolución viscosa de (2).

Por otro lado, suponga que  $u$  es subsolución viscosa de (2). Puesto que  $u \in C^1(\Omega)$ , se toma  $\psi = u$  la función test. En consecuencia,  $(u - \psi)(x) = 0$ , para todo  $x \in \Omega$ . Esto a su vez implica que

$$D(u - \psi)(x) = 0.$$

Esto quiere decir, que todos los puntos críticos  $x$  son máximos o mínimos locales de  $u - \psi$  y como  $u$  es subsolución, se sigue que

$$F(x, u(x), Du(x)) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$



Análogamente, se puede probar que

Sea  $u \in C^2(\Omega)$ . Entonces,  $u$  es una supersolución viscosa de (2) si, y solo si,

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

### Teorema 1

Sea  $u \in C^1(\Omega)$ . Entonces,  $u$  es una solución clásica de (2) con  $F$  continua, si y solo si, para todo  $\psi \in C^1(\Omega)$ ,

$$i) \left\{ \begin{array}{l} \text{si } u - \psi \text{ tiene un máximo local en el punto } x_0 \in \Omega, \\ \text{entonces } F(x_0, u(x_0), D\psi(x_0)) \leq 0. \end{array} \right.$$

y

$$ii) \left\{ \begin{array}{l} \text{si } u - \psi \text{ tiene un mínimo local en el punto } x_0 \in \Omega, \\ \text{entonces } F(x_0, u(x_0), D\psi(x_0)) \geq 0. \end{array} \right.$$

### Observación 2

Este último resultado muestra que la noción de solución viscosa es consistente con la de solución clásica. Más precisamente, si  $u \in C^1(\Omega)$  es una solución de (2) en el sentido clásico, entonces también es una solución en el sentido de la viscoso.

Ahora discutimos la unicidad de las soluciones viscosas.

Para discutir la unicidad necesitamos imponer condiciones de contorno. Por lo tanto, en esta sección se considera el siguiente problema de Dirichlet

$$\begin{cases} F(x, u(x), Du(x)) = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4)$$

donde  $\Omega$  es un conjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^N$ ,  $g \in C(\partial\Omega)$  y  $F \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ .

Damos la definición de solución viscosa para esta ecuación con condiciones de contorno.

## Definición 2

Una función  $u \in C(\overline{\Omega})$  es una solución viscosa de (4), si y solo si, para todo  $\phi \in C^1(\Omega)$ ,

$i)$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } u - \phi \text{ tiene un máximo local en el punto } x_0 \in \Omega, \\ \text{entonces } F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0)) \leq 0 \text{ y satisface } u \leq g \text{ sobre } \partial\Omega. \end{array} \right.$

y  
 $ii)$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } u - \phi \text{ tiene un mínimo local en el punto } x_0 \in \Omega, \\ \text{entonces } F(x_0, u(x_0), D\phi(x_0)) \geq 0 \text{ y satisface } u \geq g \text{ sobre } \partial\Omega. \end{array} \right.$

Además, decimos que  $u$  es subsolución viscosa (resp. supersolución) si, y solo si, verifica  $i)$  (resp.  $ii)$ ).

- ) A continuación, se enuncia un Teorema de comparación, la cual su técnica de demostración es a través del duplicamiento de variables.
- ) Dicho teorema implica la unicidad del problema de Dirichlet.

## Teorema 2 (Principio de Comparación.)

Sean  $u, v \in C(\overline{\Omega})$  sub y supersoluciones viscosas de (4) respectivamente. Suponga que existen constantes  $\gamma, C > 0$  tales que

$$F(x, r_1, p) - F(x, r_2, p) \geq \gamma(r_1 - r_2), \quad (\text{H1})$$

para todo  $(x, r_1, r_2, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ .

$$|F(x, r, p) - F(y, r, p)| \leq C(|x - y|(1 + |p|)), \quad (\text{H2})$$

para todo  $(x, y, r, p) \in \Omega \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ .

Si  $u \leq v$  sobre  $\partial\Omega$ . Entonces,

$$u \leq v \text{ en } \overline{\Omega}.$$

- ) El Principio de Comparación implica la unicidad de soluciones viscosas. Como lo veremos enseguida.

## Proposición 2 (Unicidad para el problema de Dirichlet)

*Suponga que (H1) y (H2) se mantienen. Entonces, el problema (4) tiene al menos una solución.*

### Demostración.

Suponga que  $u_1, u_2 \in C(\overline{\Omega})$  son dos soluciones de (4). Entonces, se tiene que

$$u_1 = g = u_2 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Aplicando el Teorema 2 (Principio de Comparación) con  $u = u_1$  y  $v = u_2$ , se obtiene que  $u_1 \leq u_2$  en  $\overline{\Omega}$  y intercambiando los roles de  $u_1$  y  $u_2$ , se obtiene que  $u_2 \leq u_1$  en  $\overline{\Omega}$ . En consecuencia,  $u_1 = u_2$  en  $\overline{\Omega}$ .  $\square$

## Ejemplo 1

Prueba que  $u(x) = -|x| + 1$  es solución viscosa de

$$\begin{cases} |u'| = 1 & \text{en } (-1, 1) \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Esto último significa que para todo  $v \in C^\infty(-1, 1)$ , si  $u - v$  tiene un máximo local (**mínimo local**) en el punto  $x_0 \in (-1, 1)$ , entonces  $F(x_0, u(x_0), v'(x_0)) = |v'(x_0)| \leq 1$  ( $\geq 1$ ).

## Solución.

Sea  $v \in C^\infty(-1, 1)$  tal que  $u - v$  tiene un máximo en  $x_0 \in (-1, 1)$ . Notemos lo siguiente:

- Si  $x_0 \neq 0$ , entonces  $u$  es diferenciable y  $|v'(x_0)| = |u'(x_0)| = 1$ , se tiene lo deseado.
- El problema surge cuando  $x_0 = 0$  donde  $|x|$  no es derivable. En vista de esto se considera el caso donde  $u - v$  tiene un máximo local en  $x_0 = 0$  y  $u(x_0) = v(x_0)$ .

Así, se obtiene para todo  $x$  en una vecindad abierta de  $x_0$  que

$$\begin{aligned}(u - v)(x_0) \geq (u - v)(x) &\Leftrightarrow v(x) - v(0) \geq u(x) - u(0) \\ &\Leftrightarrow v(x) - v(0) \geq -|x|.\end{aligned}$$

Luego, para  $x > 0$ , se tiene que

$$\frac{v(x) - v(0)}{x} \geq -1,$$

y si  $x < 0$ , entonces

$$\frac{v(x) - v(0)}{x} \leq 1.$$

Si  $x \rightarrow 0$ , y usando el hecho que  $v \in C^1(-1, 1)$ , se tiene que  $|v'(0)| \leq 1$  y por lo tanto  $F(x_0, u(x_0), v'(x_0)) = |v'(x_0)| - 1 \leq 0$ , i.e,  $u$  es subsolución de viscosa de (5).

- Ahora, probemos que  $u$  es supersolución viscosa de (5). Para el efecto, para todo  $v \in C^\infty(-1, 1)$  suponga que  $u - v$  alcanza un mínimo local en  $x_0 = 0$ , es decir,

$$\begin{aligned}(u - v)(x_0) &\leq (u - v)(x) \Leftrightarrow v(x) - v(0) \leq u(x) - u(0) \\ &\Leftrightarrow v(x) - v(0) \leq -|x|.\end{aligned}$$

Luego, para  $x > 0$ , se tiene que

$$\frac{v(x) - v(0)}{x} \leq -1,$$

y si  $x < 0$ , entonces

$$\frac{v(x) - v(0)}{x} \geq 1.$$

Si  $x \rightarrow 0$ , y usando el hecho que  $v \in C^1(-1, 1)$ , se tiene que  $v'(0) \leq -1$  y  $v'(0) \geq 1$ , lo cual es una contradicción. Así, no existe ninguna función  $v \in C^1(-1, 1)$  que toque por abajo a  $u$ . En consecuencia, por vacuidad, podemos afirmar que se cumple trivialmente que  $F(x_0, u(x_0), v'(x_0)) = |v'(x_0)| - 1 \geq 0$ , i.e,  $u$  es supersolución de viscosa de (5).

Por lo tanto, se tendría que  $u$  es solución viscosa de (5). □

Sean  $T > 0$  y  $O \subset \mathbb{R}^N$  un conjunto abierto y acotado con su frontera  $\partial O$  de clase  $C^2$ . Se considera el problema de valor en la frontera dado por

$$\begin{cases} u_t + F(x, t, u, Du, D^2u) = 0, & \text{en } O \times (0, T], \\ u(x, t) = \phi(x, t), & \text{en } \partial O \times (0, T], \\ u(x, 0) = \psi(x), & \text{en } O, \end{cases} \quad (\text{PVF})$$

donde

- $F \in C(O \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S^N)$  con  $S^N$  el conjunto de todas las matrices simétricas de orden  $N \times N$ ,
- $\phi \in C(\partial O \times [0, T])$  y  $\psi \in C(O)$  tal que para todo  $x \in \partial O$ ,  $\phi(x, 0) = \psi(x)$ ,
- $u_t$ ,  $Du$  y  $D^2u$  denotan respectivamente la derivada parcial con respecto a  $t$ , el gradiente de  $u$  y la matriz Hessiana de  $u$ .

## Resumen.

El objetivo principal de esta presentación fue el estudio de algunas propiedades generales de las soluciones viscosas de ecuaciones elípticas que debido a su no linealidad, en general, no tienen una solución clásica, sin embargo las soluciones viscosas son una noción de soluciones débiles para una clase de EDP del tipo HJ que son consistentes en el sentido clásico.

Algunas de las principales propiedades de una noción de soluciones viscosas son:

- Consistencia con las soluciones clásicas.
- Una forma eficiente de probar su teorema de unicidad.
- Una solución viscosa es estable con respecto a la convergencia uniforme. La importancia de la solución viscosa proviene de su estabilidad y consistencia con la solución clásica.

Con la ayuda de duplicar el número de variables, pudimos probar la unicidad de las soluciones viscosas.

- [1] Shigeaki Koike (2014), A Beginner's Guide to the Theory of Viscosity Solutions, Mathematical Society of Japan Memoirs, Volume 13 .
- [2] Michael G. Crandall and Hitoshi Ishii and Pierre-Louis Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bulletin of the American Mathematical Society, **27** (1992),  $N_0$ . 1, 1-67.
- [3] Guy Barles, *Solutions de Viscosité des Équations de Hamilto-Jacobi*, Springer-Verlag International Publishing AG, París, 1994.
- [4] Michael G. Crandall & Pierre Lions, *Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Transactions of the American Mathematical Society, **277** (1983),  $N_0$ . 1, 1-42.
- [5] Lawrence Craig Evans, *Partial Differential Equations*, Volume 19, Graduated Studies in Mathematics American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

# GRACIAS POR SU ATENCIÓN

