

Un resultado de buena colocación y continuación única para una linealización de la ecuación *ab*-Boussinesq con potencial espacio-dependiente

A cargo de: Manuel Fernando Prado Ceballos.

Kafeminarío

Consorcio de Doctorado en Matemáticas Utfsm-Pucv-Uv.

Octubre, 2023

Contenidos

1 Introducción

- Propiedad de Continuación única.
- Trabajo de Enrique Zuazua y Xu Zhang.
- Una Linealización de la ecuación ab-Boussinesq.
- Estimación de Energía

2 Problema de continuación única

- Estrategia General.
- Un resultado de continuación única.

3 Conclusiones.

4 Consecuencias.

5 Referencias



Nomenclatura

- $L_+^\infty(0, 1) := \{u \in L^\infty(0, 1) : u \text{ es positiva c.t.p}\}$
- Espacios L^2 con peso. Para $\gamma \in L_+^\infty(0, 1)$ decimos que $u \in L^2(0, 1; \gamma)$ si se cumple que

$$\int_0^1 \gamma(x) |u(x)|^2 dx < \infty.$$

Notemos que $L^2(0, 1) \subset L^2(0, 1; \gamma)$.

- $H_0^1(0, 1) := \{u \in L^2(0, 1) : u' \in L^2(0, 1) \text{ con } u(0) = u(1) = 0\}$



- Las normas que se van a considerar para $f, g \in L^2(0, 1)$

$$\left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_{L^2 \times L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2.$$

Para $f \in L^2(0, 1; \gamma_1) \cap L^2(0, 1; \gamma_2)$

$$\|f\|_{L^2(0,1;\gamma_1) \cap L^2(0,1;\gamma_2)} = \|f\|_{L^2(0,1;\gamma_1)} + \|f\|_{L^2(0,1;\gamma_2)}.$$



Definición.

Sean u_1 y u_2 soluciones de la ecuación diferencial parcial

$$G(u, u_t, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Problema de continuación única: Si $u_1 = u_2$ en $\omega \subset \Omega$, bajo qué condiciones sobre ω y sobre la suavidad de las soluciones u_1 y u_2 se puede concluir que $u_1 = u_2$ en Ω . Un caso particular cuando se refiere al establecimiento de condiciones suficientes de carácter local bajo la cual la solución u de la ecuación diferencial es idénticamente nula en Ω .



Algunos ejemplos

- Consideremos la **ecuación dispersiva Korteweg de Vries generalizada**

$$u_t + u_{xxxx} + \partial_x F(u) = 0,$$

donde F es un polinomio en u . En [2] J. Bourgain introdujo un método, basado en análisis complejo, que permite demostrar que si para todo t en un intervalo no trivial del tiempo el soporte de $u(\cdot, t)$ permanece dentro de cierto compacto fijo, entonces u es idénticamente nula.



- Consideremos la **ecuación de Zakharov-Kuznetsov**

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x \partial_y^2 u + u \partial_x u = 0, \quad u = u(x, y, t), \quad \text{con } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ y } t \in \mathbb{R}$$

En [3] Bustamente demuestran utilizando estimativos tipo Carleman que si una solución suficientemente suave de la ecuación de Zakharov-Kuznetsov tiene soporte espacial compacto en dos tiempos distintos entonces dicha solución es idénticamente nula.



La ecuación BBM

La ecuación de Benjamin-Bona-Mahony (BBM) esta dada por

$$\begin{cases} u_t - u_{txx} + u_x + uu_x = 0 & \text{en } (0, T) \times (0, 1) \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & t \in (0, T) \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{en } (0, 1) \end{cases}$$

es un modelo para ondas largas en sistemas dispersivos no lineales, que es una alternativa modelo de la ecuación clásica de KdV. La ecuación de BBM se utiliza en el análisis de ondas superficiales de larga longitud en líquidos, ondas hidromagnéticas en plasma frío, ondas acústicas de gravedad en fluidos compresibles y ondas acústicas en cristales anarmónicos.



Referencia principal.

Enrique Zuazua y Xu Zhang estudiaron en [4] resultados de continuación única para una linealización de la ecuación BBM,

$$\begin{cases} u_t - u_{txx} = [\alpha(x)u]_x + \beta(x)u & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t \in (0, T), \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases}$$

donde $T > 0$ es un tiempo dado, $\alpha \in L^\infty(0, 1)$ y $\beta \in L^2(0, 1)$ son funciones dadas.



El problema de propiedad de continuación única que considera Zuazua y Zhang para la ecuación BBM es el siguiente: si

$$u(t, x) = 0, \quad \text{en } (0, T) \times F, \quad (1)$$

entonces necesariamente u es idénticamente cero. Donde demuestran el siguiente resultado de continuación única.

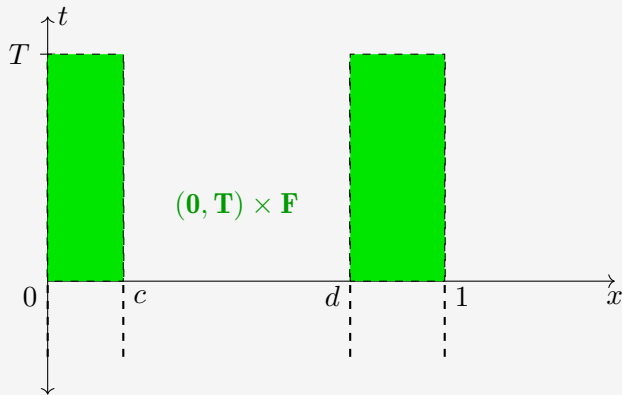
Teorema

Sean $\beta = 0$ y $\alpha \in L_+^\infty(0, 1)$ o $-\alpha \in L_+^\infty(0, 1)$. Sea $0 < c < d < 1, T > 0$ y $u_0 \in L^2(0, 1)$. Si la solución débil $u \in C([0, T]; L^2(0, 1))$ de la BBM satisface (1) con $F = (0, c) \cup (d, 1)$. Entonces $u = 0$ en $\mathbb{R} \times (0, 1)$.



Estrategia Empleada Zuazua-Zhang

- Se considera el siguiente subconjunto de $(0, T) \times F$ con $F = (0, c) \cup (d, 1)$.



- Describir las soluciones de la linealización de la ecuación BBM mediante la utilización de un operador compacto y anti-simétrico.
- Construcción de un espacio de Hilbert apropiado que contenta las soluciones que cumplen la hipótesis de la propiedad de continuación única.
- Utilización del teorema de descomposición espectral para encontrar una base para espacio de Hilbert, con el fin de encontrar una representación de las soluciones. Este hecho clave permite convertir el problema de propiedad continuación única en un problema de valores propios.
- El problema de valores propios se resuelve con técnicas de ecuaciones diferenciales ordinarias.



Familia de sistemas tipo Boussinesq

Estas ecuaciones fueron derivadas por primera vez por Boussinesq para describir la propagación bidireccional de ondas largas y de pequeña amplitud, ondas de gravedad en la superficie del agua en un canal. Estos sistemas surgen también al modelar la propagación de ondas de cresta larga en grandes lagos o en el océano y en otros contextos. Bona, Chen y Saunt en [1] derivan una familia de cuatro parámetros de sistemas Boussinesq a partir de las ecuaciones bidimensionales de Euler para el flujo en superficie libre dada por

$$\begin{cases} \eta_t + \omega_x + (\omega\eta)_x + a\omega_{xxx} - c\eta_{xxt} = 0, \\ \omega_t + \eta_x + \omega\omega_x + b\eta_{xxx} - d\omega_{xxt} = 0, \end{cases}$$

donde las constantes a, b, c, d satisfacen la siguiente relación,

$$a + b + c + d = \frac{1}{3} - \sigma$$

donde σ es un parámetro relacionado con la tensión superficial.



Una linealización de la ecuación ab -Boussinesq con potencial espacio dependiente.

Consideremos la siguiente linealización del sistema ab -Boussinesq dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - a\partial_x^2)\partial_t\eta(t, x) = \partial_x [\alpha_1(x)\psi(t, x) + \alpha_2(x)\eta(t, x)] + \alpha_3(x)\eta(t, x), \\ (I - b\partial_x^2)\partial_t\psi(t, x) = \partial_x [\beta_1(x)\psi(t, x) + \beta_2(x)\eta(t, x)] + \beta_3(x)\psi(t, x), \\ \eta(t, 0) = \eta(t, 1) = \psi(t, 0) = \psi(t, 1) = 0, \\ \eta(0, x) = \eta_0(x), \psi(0, x) = \psi_0(x), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{en } t \in (0, T), \\ \text{en } x \in (0, 1) \end{array}$$

donde $a, b, T > 0$ son constantes dadas, para $i = 1, 2$, $\alpha_i, \beta_i \in L^\infty(0, 1)$ y $\alpha_3, \beta_3 \in L^2(0, 1)$ son potenciales dados.



Un resultado de buena colocación. para la ecuación ab-Boussinesq

Teorema

Sean $\alpha_i, \beta_i \in L^\infty(0, 1)$ y $\alpha_3, \beta_3 \in L^2(0, 1)$ para $i = 1, 2$. Dado $\eta_0, \psi_0 \in L^2(0, 1)$, existe una única solución débil de la ecuación linealizada ab-Boussinesq en la clase $(\eta, \psi) \in C([0, T]; L^2(0, 1) \times L^2(0, 1))$ tal que $(\eta(0, x), \psi(0, x)) = (\eta_0, \psi_0)$ para $x \in (0, 1)$.



Ecuación equivalente

Consideremos $\eta_0, \psi_0 \in L^2(0, 1)$. Tenemos la siguiente ecuación equivalente,

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix}_t = \mathcal{B} \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix}, & t > 0, \\ \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix}, & . \end{cases}$$

Donde podemos ver que $\mathcal{B} : L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$ es un operador lineal acotado dado por

$$\mathcal{B} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I - aA)^{-1} & 0 \\ 0 & (I - bA)^{-1} \end{pmatrix} \left[\partial_x \begin{pmatrix} \alpha_2 f_1 + \alpha_1 f_2 \\ \beta_2 f_1 + \beta_1 f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_3 f_1 \\ \beta_3 f_2 \end{pmatrix} \right].$$



Como $\mathcal{B}$ es un operador lineal y acotado entonces para $\eta_0, \psi_0 \in L^2(0, 1)$ tenemos que

$$T(t) \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = e^{t\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\mathcal{B})^n}{n!} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix},$$

esta bien definido. Más aún,

$$\left\| T(t) \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} \right\|_{L^2(0,1) \times L^2(0,1)} \leq e^{ct} \left\| \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} \right\|_{L^2(0,1) \times L^2(0,1)}$$

y

$$\frac{d}{dt} T(t) = \mathcal{B}T(t) = T(t)\mathcal{B}$$

con $T(0) = I$.



Estimativo de energía.

La unicidad la probaremos usando un estimativo de energía. Denotamos $E(t)$ como la energía de las soluciones del sistema definida como

$$E(t) := \frac{1}{2} \left(\left\| \begin{pmatrix} \sqrt{a}\eta \\ \sqrt{b}\psi \end{pmatrix} \right\|_{L^2(0,1) \times L^2(0,1)}^2 + \left\| (-A)^{-1/2} \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{L^2(0,1) \times L^2(0,1)}^2 \right)$$

Podemos ver que dado $T > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$E(t) \leq CE(0)$$

para todo $t \in [0, T]$.



Propiedad de continuación única

En el caso de la ecuación ab-Boussinesq, estamos interesados en la siguiente propiedad de continuación única

$$\eta = \psi = 0 \text{ en } (0, T) \times F, \quad F \subset (0, 1) \implies \eta = \psi = 0 \text{ en } (0, T) \times (0, 1)$$

Denotaremos como (HCU) como la hipótesis del resultado de continuación única.

Observación. Si los potenciales dados son nulos en un abierto, no vacío $U \subset (0, 1) \setminus \overline{F}$, entonces cualquier función

$$(\eta, \psi) = (f_1(x), f_2(x)) \in C_0^\infty(U) \times C_0^\infty(U)$$

satisface la ecuación y (HCU) , pero u no es necesariamente idénticamente igual a cero.



Problema Particular.

Además de las hipótesis del resultado de buena colocación, asumiremos que $a = b$, $\beta_3 = \alpha_3 = 0$ y α_i, β_i son positivas en $(0, 1)$ para $i = 1, 2$. Así, obtenemos el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - aA)\partial_t \eta(t, x) = \partial_x(\alpha_1(x)\psi(t, x) + \alpha_2(x)\eta(t, x)) , \\ (I - aA)\partial_t \psi(t, x) = \partial_x(\beta_1(x)\psi(t, x) + \beta_2(x)\eta(t, x)) , \\ \eta(t, 0) = \eta(t, 1) = \psi(t, 0) = \psi(t, 1) = 0 \quad t \in (0, T), \\ \eta(0, x) = \eta_0(x), \quad \psi(0, x) = \psi_0(x), \text{ en } x \in (0, 1), \end{array} \right.$$



Estrategia General.

El objetivo es reducir el problema de continuación única a un problema de autovectores del operador asociado al sistema.

Un resultado central

Lema. Sea $\xi_i \in L^\infty(0, 1)$ para $i = 1, 2, 3, 4$ y $\phi_i \in L^2(0, 1)$ para $i = 1, 2$. Suponga $\eta, \psi \in L^2(0, 1)$ satisface para $x \in (0, 1)$

$$\begin{cases} \eta - \eta_{xx} = [\xi_1(x)\eta + \xi_2(x)\psi]_x + \phi_1(x)\eta, \\ \psi - b\psi_{xx} = [\xi_3(x)\psi + \xi_4(x)\eta]_x + \phi_2(x)\psi, \\ \eta(0) = \psi(0) = \eta_x(0) = \psi_x(0) = 0, \end{cases}$$

Entonces $\eta \equiv \psi \equiv 0$.



Operador Asociado

Reescribamos nuestro sistema de la siguiente manera

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - aA)\partial_t \eta = \partial_x(\alpha_1(x)\psi + \alpha_2(x)\eta) , \\ (I - aA)\partial_t \psi = \partial_x(\beta_1(x)\psi + \beta_2(x)\eta) , \\ \eta(t, 0) = \eta(t, 1) = \psi(t, 0) = \psi(t, 1) = 0 \quad t \in (0, T), \\ \eta(0, x) = \eta_0(x), \quad \psi(0, x) = \psi_0(x), \text{ en } x \in (0, 1), \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix}_t = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\alpha_2} \eta \\ \mathcal{A}_{\beta_1} \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\alpha_1} \psi \\ \mathcal{A}_{\beta_2} \eta \end{pmatrix} , \\ \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix}(t, 0) = \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix}(t, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix}(0, x) = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} . \end{array} \right.$$

$\mathcal{A}_\gamma : L^2(0, 1; \gamma) \rightarrow L^2(0, 1; \gamma)$ es el operador lineal acotado dada por

$$\mathcal{A}_\gamma f = (I - aA)^{-1} \partial_x(\gamma f).$$



Propiedades del operador $\mathcal{A}_\gamma$

Recordando que

$$\mathcal{A}_\gamma f = (I - aA)^{-1} \partial_x(\gamma f).$$

- para $f \in L^2(0, 1; \gamma)$ con $f(0) = f(1) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\gamma f(x) = & \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{a}}} - e^{-\frac{x}{\sqrt{a}}}}{2(e^{\frac{1}{\sqrt{a}}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{a}}})} \int_0^1 \left(e^{\frac{1}{\sqrt{a}}(1-s)} + e^{\frac{1}{\sqrt{a}}(s-1)} \right) \gamma_i(s) f(s) ds \\ & - \frac{1}{2} \int_0^x \left(e^{\frac{1}{\sqrt{a}}(x-s)} + e^{\frac{1}{\sqrt{a}}(s-x)} \right) \gamma_i(s) f(s) ds. \end{aligned}$$

- $\mathcal{A}_\gamma \in \mathcal{L}(L^2(0, 1)).$
- $\mathcal{A}_\gamma$ es un operador compacto en $L^2(0, 1; \gamma).$



Construcción de $\mathcal{H}$.

Sean $c, d > 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in W(0, 1)$, y el conjunto

$$\begin{aligned}\gamma_0(x) &= e^{\frac{1}{\sqrt{a}}(x-1)}, & \rho_0(x) &= e^{\frac{1}{\sqrt{a}}(1-x)}, \\ \gamma_n(x) &= \int_x^1 \left(e^{\frac{1}{\sqrt{a}}(x-s)} + e^{\frac{1}{\sqrt{a}}(s-x)} \right) \gamma_{n-1}(s) \begin{pmatrix} \alpha_2(s) & \beta_2(s) \\ \alpha_1(s) & \beta_1(s) \end{pmatrix} ds, \\ \rho_n(x) &= \int_x^1 \left(e^{\frac{1}{\sqrt{a}}(x-s)} + e^{\frac{1}{\sqrt{a}}(s-x)} \right) \rho_{n-1}(s) \begin{pmatrix} \alpha_2(s) & \beta_2(s) \\ \alpha_1(s) & \beta_1(s) \end{pmatrix} ds,\end{aligned}$$

Sea $\eta, \psi \in C([0, T]; L^2(0, 1))$ una solución débil que cumpla (HCU) con $F = (0, c) \cup (d, 1)$. Entonces para $n \in \mathbb{N}, t \in (0, T)$

$$\int_0^1 \gamma_n(s) \begin{pmatrix} \alpha_2(s) & \alpha_1(s) \\ \beta_2(s) & \beta_1(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta(t, s) \\ \psi(t, s) \end{pmatrix} ds = \int_0^1 \rho_n(s) \begin{pmatrix} \alpha_2(s) & \alpha_1(s) \\ \beta_2(s) & \beta_1(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta(t, s) \\ \psi(t, s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Observación. Recordemos como se puede escribir el operador $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix} = \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{a}}} - e^{-\frac{x}{\sqrt{a}}}}{2(e^{\frac{1}{\sqrt{a}}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{a}}})} \int_0^1 \left(e^{\frac{1}{\sqrt{a}}(1-s)} + e^{\frac{1}{\sqrt{a}}(s-1)} \right) \begin{pmatrix} \alpha_2(s) & \alpha_1(s) \\ \beta_2(s) & \beta_1(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta(t, s) \\ \psi(t, s) \end{pmatrix} ds$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^x \left(e^{\frac{1}{\sqrt{a}}(x-s)} + e^{\frac{1}{\sqrt{a}}(s-x)} \right) \begin{pmatrix} \alpha_2(s) & \alpha_1(s) \\ \beta_2(s) & \beta_1(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta(t, s) \\ \psi(t, s) \end{pmatrix} ds.$$

Ahora, si η, ψ cumple (HCU) entonces se puede concluir

$$\int_0^1 \left(e^{\frac{1}{\sqrt{a}}(1-s)} + e^{\frac{1}{\sqrt{a}}(s-1)} \right) \begin{pmatrix} \alpha_2(s) & \alpha_1(s) \\ \beta_2(s) & \beta_1(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



El espacio apropiado $\mathcal{H}$

Utilizando lo anterior, definimos el espacio de hilbert $H \subset L^2(0, 1; \alpha_2) \times L^2(0, 1; \alpha_1)$.

$\mathcal{H} := \{f_1 \in L^2(0, 1; \alpha_2) \cap L^2(0, 1; \beta_2) \text{ y } f_2 \in L^2(0, 1; \alpha_1) \cap L^2(0, 1; \beta_1) :$

$$\int_0^1 \gamma_n(s) \begin{pmatrix} \alpha_2(s) & \alpha_1(s) \\ \beta_2(s) & \beta_1(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} ds = \int_0^1 \rho_n(s) \begin{pmatrix} \alpha_2(s) & \alpha_1(s) \\ \alpha_2(s) & \alpha_1(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots\}$,

$$\left\| \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}} := \|f_1\|_{L^2(0,1;\alpha_2) \cap L^2(0,1;\beta_2)} + \|f_2\|_{L^2(0,1;\alpha_1) \cap L^2(0,1;\beta_1)}$$

$\mathcal{H}$ es un subespacio cerrado por lo tanto es un espacio de Hilbert con la topología inducida por el espacio que esta contenido.



Propiedades del operador $\mathcal{A}$ en $\mathcal{H}$.

- $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
- Para $(f_1, f_2) \in \mathcal{H}$,

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \int_0^x \left(e^{\frac{1}{\sqrt{a}}(x-s)} + e^{\frac{1}{\sqrt{a}}(s-x)} \right) \begin{pmatrix} \alpha_2(s) & \alpha_1(s) \\ \alpha_2(s) & \alpha_1(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} ds.$$

- $\mathcal{A}$ es un operador compacto y anti-simétrico en $\mathcal{H}$ para $\alpha_2 = \beta_2$ y $\alpha_1 = \beta_1$.
- para $i\mathcal{A}$ en $\mathcal{H}$, se puede encontrar una sucesión de auto-valores $\{\lambda_n\}$ de $\mathcal{A}$, $\lambda_n \in i\mathbb{R}$ con λ_n tendiendo a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Para cada λ_n ($n = 1, 2, \dots$), se puede escoger sus correspondientes auto-vectores, tal que

$$\begin{pmatrix} e_{1,1}^1 \\ e_{2,1}^1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} e_{1,1}^{\mu_1} \\ e_{2,1}^{\mu_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} e_{1,n}^1 \\ e_{2,n}^1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} e_{1,n}^{\mu_n} \\ e_{2,n}^{\mu_n} \end{pmatrix}, \dots$$

forma una base ortonormal de $\mathcal{H}$.



Un resultado de continuación única

Teorema

Sean $0 < c < d < 1, T > 0, (\eta_0, \psi_0) \in L^2(0, 1), \alpha_3 \equiv \beta_3 \equiv 0$ y $\alpha_1 \equiv \beta_1, \alpha_2 \equiv \beta_2 \in L_+^\infty(0, 1)$ tal que α_1 y α_2 son linealmente independientes. Supongamos que una solución débil $(\eta, \psi) \in C([0, T]; L^2(0, 1) \times L^2(0, 1))$ de la ecuación linealizada ab-Boussinesq satisface (HCU) con $F = (0, c) \cup (d, 1)$. Entonces $(\eta, \psi) \equiv (0, 0)$ en $\mathbb{R} \times (0, 1)$.



Demostración

Lo primero que podemos notar es que los valores propios son diferentes a cero. En efecto, si $\lambda = 0$ es un valor propio, entonces existe $e_i \in H_0^1(0, 1)$, $e_i \neq 0$ con $i = 1, 2$ tal que

$$(I - aA)^{-1} \partial_x (\alpha_2 e_1 + \alpha_1 e_2)_x \equiv 0,$$

Lo que implica $\alpha_2 e_1 + \alpha_1 e_2 = Cte$. Como $e_1 \in H_0^1(0, 1)$ y $e \neq 0$, esto implica que la $Cte = 0$ o α_i es no acotado para $i = 1$ o $i = 2$. Como la segunda posibilidad se excluye para $i = 1, 2$. Por lo tanto,

$$\alpha_2 e_1 + \alpha_1 e_2 = 0$$

en $(0, 1)$. Luego, como $\alpha_1, \alpha_2 \in L_+^\infty(0, 1)$, y son linealmente independientes tenemos que $(e_1, e_2) = (0, 0)$ en casi todo punto de $(0, 1)$, lo cual es una contradicción del hecho que $e_1 \neq 0$ y $e_2 \neq 0$.



Como el dato inicial $(\eta_0, \psi_0) \in \mathcal{H}$, entonces lo podemos descomponer como

$$\begin{pmatrix} \eta_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\mu_n} a_n^j \begin{pmatrix} e_{1,n}^j \\ e_{2,n}^j \end{pmatrix}$$

donde a_n^j son constantes. Ahora, la solución de nuestro problema equivalente se puede expresar de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \eta(t, x) \\ \psi(t, x) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\mu_n} a_n^j \begin{pmatrix} e_{1,n}^j \\ e_{2,n}^j \end{pmatrix} \right) e^{\lambda_n t}$$

Sin embargo, recordando que $F = (0, c) \cup (d, 1)$, obtenemos que

$$(\eta(t, x), \psi(t, x)) = (0, 0) \quad \text{en } \mathbb{R} \times (0, c).$$



Ahora, para $(t, x) \in \mathbb{R} \times (0, c)$ tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\mu_n} a_n^j \begin{pmatrix} e_{1,n}^j \\ e_{2,n}^j \end{pmatrix} \right) e^{\lambda_n t} = 0.$$

Notemos que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{irt} e^{-ist} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } r = s, \\ 0 & \text{si } r \neq s. \end{cases}$$

para todo $r, s \in \mathbb{R}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{\mu_n} a_n^j \begin{pmatrix} e_{1,n}^j \\ e_{2,n}^j \end{pmatrix} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-\lambda_n t} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\mu_m} a_m^j \begin{pmatrix} e_{1,m}^j \\ e_{2,m}^j \end{pmatrix} \right) e^{\lambda_m t} dt = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

para todo $x \in (0, c)$.



Podemos ver que

$$\begin{pmatrix} e_1(x) \\ e_2(x) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{\mu_n} a_n^j \begin{pmatrix} e_{1,n}^j \\ e_{2,n}^j \end{pmatrix}$$

esta formada por una combinación lineal de autovectores de $\mathcal{A}$ correspondientes a λ_n entonces

$$\begin{cases} (I - a\mathcal{A})^{-1}(\alpha_2 e_1(x) + \alpha_1 e_2(x)) = \lambda_n e_1(x), \\ (I - a\mathcal{A})^{-1}(\alpha_2 e_1(x) + \alpha_1 e_2(x)) = \lambda_n e_2(x), \\ e_1(0) = e_2(0) = 0. \end{cases}$$

Entonces por el Lema , tenemos que $e_1 \equiv e_2 \equiv 0$ en $(0, 1)$. Obtenemos que

$$a_n^j = 0, \quad j = 1, \dots, \mu_n, n = 1, 2, \dots.$$

Finalmente, obtenemos que $\eta_0 \equiv \psi_0 \equiv 0$. Por lo tanto, $\eta = \psi = 0$ en $\mathbb{R} \times (0, 1)$.



Conclusiones.

- Se logra adaptar un resultado de continuación única de Zuazua y Zhang en [4] al caso de una linealización del sistema aa-Boussinesq con potenciales espacio dependientes. Para lograr este resultado fue necesario suponer la igualdad y la independencia lineal entre los potenciales.



Controlabilidad aproximada

De manera general, podemos formular un sistema de control de una ecuación en derivadas parciales (EDP) como

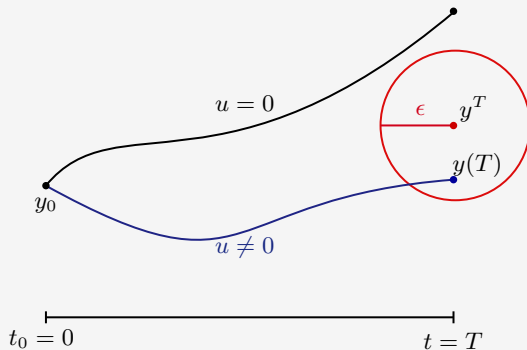
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)) & t > 0, \\ y(0) = y^0, \end{cases}$$

donde $t \mapsto y(t) \in X$ es el estado del sistema y $t \mapsto u(t) \in U$ es el control en el instante t . Los conjuntos X y U son los espacios de estado y controles admisibles, respectivamente.



Definición

El sistema de control es aproximadamente controlable en tiempo T si, para toda y^0 e y^T en X , y todo $\varepsilon > 0$, existe un control $u(t) \in U$ tal que $\|y^T - y(T)\|_X \leq \varepsilon$.



Consecuencias.

El resultado de continuación única obtenido puede ser utilizado para establecer la controlabilidad aproximada para el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - au_{txx} = -\alpha_2(x)u_x - \alpha_2(x)v_x + f\chi_F & \text{en } (0, T) \times (0, 1), \\ v_t - av_{txx} = -\alpha_1(x)u_x - \alpha_1(x)v_x + g\chi_F & \text{en } (0, T) \times (0, 1), \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & t \in (0, T) \\ v(t, 0) = v(t, 1) = 0 & t \in (0, T) \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 & \text{en } (0, 1) \end{array} \right.$$

donde $f, g \in L^2((0, T) \times F)$ con $F \subset [0, 1]$ denota los controles y χ_F denota la función característica del conjunto F donde el control es localizado. Este resultado está en preparación para publicación.



REFERENCIAS I

-  Bona, Chen, and Saut, *Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media. i: Derivation and linear theory*, Journal of Nonlinear Science **12** (2002), 283–318.
-  Jean Bourgain, *On the compactness of the support of solutions of dispersive equations*, International Mathematics Research Notices **1997** (1997), no. 9, 437–447.
-  E Bustamante, *Principios de continuación única en ecuaciones dispersivas*, Universidad Nacional de Colombia. Tesis, Abril (2011).
-  Xu Zhang and Enrique Zuazua, *Unique continuation for the linearized benjamin-bona-mahony equation with space-dependent potential*, Mathematische Annalen **325** (2003), no. 3, 543–582.



