

1 de Diciembre del 2023

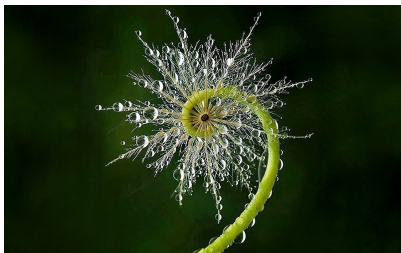


Ecuaciones Diferenciales en Geometría Conforme

Carolina Ana Rey

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María





El libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático, cuyos caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales sería imposible entender una sola palabra y se andaría siempre como en un laberinto oscuro”
Galileo Galilei (Il Saggiatore)

Contenido



- Introducción
 - Qué es la Geometría Conforme
 - Ecuaciones en Geometría Conforme
- Algunos Resultados
 - La ecuación de Yamabe en un producto
 - Problema de Yamabe Fraccionario
 - Problema de la Q-curvatura constante

Geometría Conforme



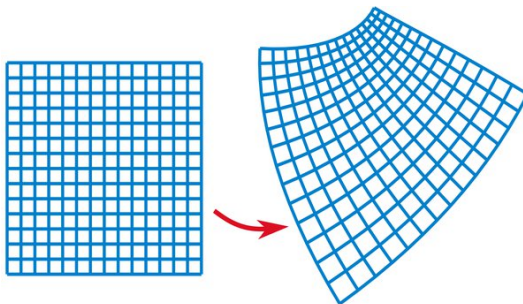


Geometría Conforme

Estudio de transformaciones que preservan los ángulos para comprender la geometría del espacio.

Geometría Conforme

Estudio de transformaciones que preservan los ángulos para comprender la geometría del espacio.





Teorema de Uniformización

Cada superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a:

- *el espacio hiperbólico (curvatura constante $\equiv -1$),*
- *el plano (curvatura constante $\equiv 0$),*
- *o la esfera de Riemann (curvatura constante $\equiv 1$)*

Teorema de Uniformización

Cada superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a:

- *el espacio hiperbólico (curvatura constante $\equiv -1$),*
- *el plano (curvatura constante $\equiv 0$),*
- *o la esfera de Riemann (curvatura constante $\equiv 1$)*

Transformación conforme $\implies$ métrica conforme.

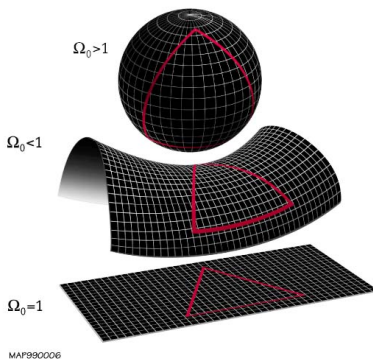
Teorema de Uniformización

Cada superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a:

- *el espacio hiperbólico (curvatura constante $\equiv -1$),*
- *el plano (curvatura constante $\equiv 0$),*
- *o la esfera de Riemann (curvatura constante $\equiv 1$)*

Transformación conforme $\implies$ métrica conforme. ¿Dimensiones superiores?

Curvatura en dimensión 2





El problema de Yamabe

- (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de dim $n \geq 3$,



El problema de Yamabe

- (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de dim $n \geq 3$,
- $\tilde{g}$ es **conforme** a $g \Leftrightarrow \tilde{g} = \phi g$ for some $\phi > 0$, ie, preserva ángulos.



El problema de Yamabe

- (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de dim $n \geq 3$,
- $\tilde{g}$ es conforme a $g \Leftrightarrow \tilde{g} = \phi g$ for some $\phi > 0$, ie, preserva ángulos.

Problema de Yamabe:

¿Existe una métrica conforme a g con curvatura escalar constante?



El problema de Yamabe

- (M, g) una variedad Riemanniana cerrada de dim $n \geq 3$,
- $\tilde{g}$ es conforme a $g \Leftrightarrow \tilde{g} = \phi g$ for some $\phi > 0$, ie, preserva ángulos.

Problema de Yamabe:

¿Existe una métrica conforme a g con curvatura escalar constante?

Sí.

Yamabe (1960), Trudinger (1968), Aubin (1976), Schoen (1984)



Ecuación de Yamabe

$\exists \tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ con curvatura escalar constante c
 $\iff \exists u \in C^\infty, u > 0 :$

$$-a_n \Delta_g u + S_g u = c u^{\frac{n+2}{n-2}},$$

con S_g la curvatura escalar de la métrica g .



Ecuación de Yamabe

$\exists \tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ con curvatura escalar constante c
 $\iff \exists u \in C^\infty, u > 0 :$

$$-a_n \Delta_g u + S_g u = c u^{\frac{n+2}{n-2}},$$

con S_g la curvatura escalar de la métrica g .

$\hookrightarrow$ Si $(M^n, g) = (\mathbb{R}^n, |dx|^2) \Rightarrow u = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + |x - x_0|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}$ (bubbles)

La constante de Yamabe.





La constante de Yamabe.

Equivale a encontrar puntos críticos del funcional

$$Q(\tilde{g}) = Q_g(u) = \frac{\int_M (a_n \|\nabla_g u\|^2 + S_g u^2) dv_g}{(\int_M u^p dv_g)^{2/p}}$$



La constante de Yamabe.

Equivale a encontrar puntos críticos del funcional

$$Q(\tilde{g}) = Q_g(u) = \frac{\int_M (a_n \|\nabla_g u\|^2 + S_g u^2) dv_g}{(\int_M u^p dv_g)^{2/p}}$$

Restringido a $[g] = \{\tilde{g} : \tilde{g} = \phi g, \phi > 0\}$, Q está acotado inferiormente . Luego definimos

$$Y(M, [g]) = \inf \{ Q(\tilde{g}) : \tilde{g} \in [g] \}$$

Solución del problema





Solución del problema

- Este ínfimo siempre se alcanza. Entonces



Solución del problema

- Este ínfimo siempre se alcanza. Entonces
- Siempre existe al menos una solución positiva de la ecuación de Yamabe con $\Lambda = Y(M, [g])$.
- Existe al menos una métrica conforme de curvatura escalar constante.



Solución del problema

- Este ínfimo siempre se alcanza. Entonces
- Siempre existe al menos una solución positiva de la ecuación de Yamabe con $\Lambda = Y(M, [g])$.
- Existe al menos una métrica conforme de curvatura escalar constante.

Es natural preguntarse

¿Existe una única métrica de curvatura escalar constante?



Solución del problema

- Este ínfimo siempre se alcanza. Entonces
- Siempre existe al menos una solución positiva de la ecuación de Yamabe con $\Lambda = Y(M, [g])$.
- Existe al menos una métrica conforme de curvatura escalar constante.

Es natural preguntarse

¿Existe una única métrica de curvatura escalar constante?

- Si $Y(M, [g]) \leq 0$ entonces existe una única métrica de curvatura escalar constante y volumen unitario;
- Si $Y(M, [g]) > 0$ entonces podría existir multiplicidad métrica de curvatura escalar constante y volumen unitario.



Ejemplos

- En (S^n, g_0) , todas las soluciones son minimizantes.



Ejemplos

- En $(\mathbb{S}^n, g_0)$, todas las soluciones son minimizantes.
- Productos de variedades riemannianas cerradas de la forma:



Ejemplos

- En $(\mathbb{S}^n, g_0)$, todas las soluciones son minimizantes.
- Productos de variedades riemannianas cerradas de la forma:

$$(M \times X, [g + \varepsilon^2 h])$$



Ejemplos

- En $(\mathbb{S}^n, g_0)$, todas las soluciones son minimizantes.
- Productos de variedades riemannianas cerradas de la forma:

$$(M \times X, [g + \varepsilon^2 h])$$

Si (M, g) y (X, h) son de curvatura escalar constante, entonces el producto tiene curvatura escalar constante $S_g + \varepsilon^{-2} S_h$ (constante).



Ejemplos

- En $(\mathbb{S}^n, g_0)$, todas las soluciones son minimizantes.
- Productos de variedades riemannianas cerradas de la forma:

$$(M \times X, [g + \varepsilon^2 h])$$

Si (M, g) y (X, h) son de curvatura escalar constante, entonces el producto tiene curvatura escalar constante $S_g + \varepsilon^{-2} S_h$ (constante). Calculando el funcional de Yamabe para estas métricas

$$Q(g + \delta h) \rightarrow \infty \quad \text{cuando } \delta \rightarrow 0.$$



Laplaciano Conforme Fraccionario

$$(M^n, g) \rightarrow P_\gamma^g, \gamma \in \left(0, \frac{n}{2}\right), \text{ no local}$$



Laplaciano Conforme Fraccionario

$$(M^n, g) \rightarrow P_\gamma^g, \gamma \in \left(0, \frac{n}{2}\right), \text{ no local}$$

Observaciones



Laplaciano Conforme Fraccionario

$$(M^n, g) \rightarrow P_\gamma^g, \gamma \in \left(0, \frac{n}{2}\right), \text{ no local}$$

Observaciones

- Si $\gamma = 1$, $P_1^g = L_g = -\Delta_g + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g$ (Laplaciano Conforme).



Laplaciano Conforme Fraccionario

$$(M^n, g) \rightarrow P_\gamma^g, \gamma \in \left(0, \frac{n}{2}\right), \text{ no local}$$

Observaciones

- Si $\gamma = 1$, $P_1^g = L_g = -\Delta_g + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g$ (Laplaciano Conforme).
- Si $\gamma = 2$, $P_2^g \psi :=$

$$\Delta_g^2 \psi + \frac{4}{N-2} \operatorname{div}_g (\operatorname{Ric}_g (\nabla \psi, e_i) e_i) - \frac{N^2 - 4N + 8}{2(N-1)(N-2)} \operatorname{div}_g (S_g \nabla \psi) + \frac{N-4}{2} Q_g \psi,$$

(Operador de Paneitz).

- Caso fraccionario: estudiamos $\gamma \in (0, 1)$ para evitar complicaciones técnicas.



Laplaciano Conforme Fraccionario

$$(M^n, g) \rightarrow P_\gamma^g, \gamma \in \left(0, \frac{n}{2}\right), \text{ no local}$$

Observaciones

- Si $\gamma = 1$, $P_1^g = L_g = -\Delta_g + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g$ (Laplaciano Conforme).
- Si $\gamma = 2$, $P_2^g \psi :=$

$$\Delta_g^2 \psi + \frac{4}{N-2} \operatorname{div}_g (\operatorname{Ric}_g (\nabla \psi, e_i) e_i) - \frac{N^2 - 4N + 8}{2(N-1)(N-2)} \operatorname{div}_g (S_g \nabla \psi) + \frac{N-4}{2} Q_g \psi,$$

(Operador de Paneitz).

- Caso fraccionario: estudiamos $\gamma \in (0, 1)$ para evitar complicaciones técnicas.
- No hay fórmulas explícitas para este operador en general.



Propiedad Conforme

Si $g_w = w^{\frac{4}{n-2\gamma}} g$ entonces

$$P_{\gamma}^{g_w} f = w^{-\frac{n+2\gamma}{n-2\gamma}} P_{\gamma}^g(wf).$$



Propiedad Conforme

Si $g_w = w^{\frac{4}{n-2\gamma}} g$ entonces

$$P_{\gamma}^{g_w} f = w^{-\frac{n+2\gamma}{n-2\gamma}} P_{\gamma}^g(wf).$$

$\hookrightarrow$ Curvaturas fraccionarias asociadas: $Q_{\gamma}^g := P_{\gamma}^g(1) \Rightarrow f = 1.$

$$P_{\gamma}^g(w) = w^{\frac{n+2\gamma}{n-2\gamma}} Q_{\gamma}^{g_w}$$

Algunos Problemas estudiados



Problema de Yamabe en $M \times N$

- Rey, Ruiz, 2021



Problema de Yamabe en $M \times N$

- Rey, Ruiz, 2021

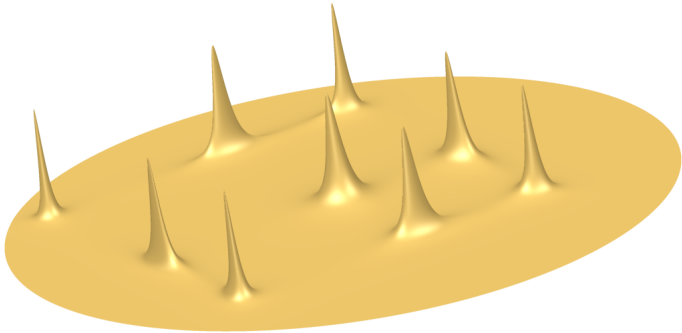
Estudiamos la ecuación de Yamabe para una variedad producto de la forma $(M \times N, g + \varepsilon h)$:

$$-\varepsilon^2 \Delta_g u + (1 + \varepsilon^2 k) u = u^{p-1} \quad (1)$$

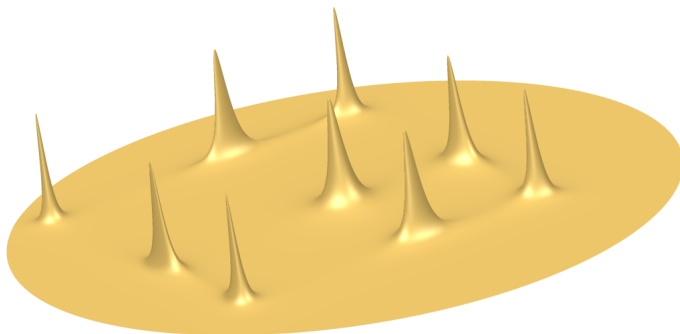
donde k es una función suave.

Probamos un resultado de existencia de soluciones con k -peaks, para cada número natural k , que se concentran alrededor de un punto crítico de la curvatura escalar de M .

Probamos un resultado de existencia de soluciones con k -peaks, para cada número natural k , que se concentran alrededor de un punto crítico de la curvatura escalar de M .



Probamos un resultado de existencia de soluciones con k -peaks, para cada número natural k , que se concentran alrededor de un punto crítico de la curvatura escalar de M .





Problema de Yamabe Fraccionario

$$\gamma \in (0, 1), (M^n, [g]); n > 2\gamma,$$

$$\exists g_w = w^{\frac{4}{n-2\gamma}} g \text{ métrica conforme con curvatura constante}$$

$$Q_\gamma^{g_w}(w > 0)?$$

O

$$\exists w \in C^\infty, w > 0$$

$$P_\gamma^g(w) = cw^{\frac{n+2\gamma}{n-2\gamma}} \quad ?$$

$$\text{- Si } (M^n, g) = (\mathbb{R}^n, |dx|^2) \Rightarrow w = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + |x - x_0|^2} \right)^{\frac{n-2\gamma}{2}} \text{ (bubbles)}$$



Problema fraccionario de Yamabe

- Rey, Saintier, (2024)

Este artículo trata sobre la teoría de los espacios fraccionarios de Sobolev en una variedad Riemanniana compacta.



Problema fraccionario de Yamabe

- Rey, Saintier, (2024)

Este artículo trata sobre la teoría de los espacios fraccionarios de Sobolev en una variedad Riemanniana compacta.

Como aplicación, estudiamos una ecuación elíptica no local de la forma

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} u + h|u|^{p-2}u = f|u|^{q-2}u, \quad (2)$$

donde el operador $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} u$ es un operador no local un poco más general que el Laplaciano fraccionario.



El laplaciano fraccionario en M

Podríamos tomar $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} u = (-\Delta)^{\gamma} u$.



El laplaciano fraccionario en M

Podríamos tomar $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} u = (-\Delta)^{\gamma} u$.

En $\mathbb{R}^n$

$$(-\Delta)^{\gamma} f(x) = P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(f(x+y) - f(x))}{|y|^{(n+2\gamma)}} dy$$

Q-curvatura constante

- S. Alarcón, J. Petean (2023)

Probamos multiplicidad de soluciones para la ecuación de Q-curvatura constante:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \Delta_g^2 u - \varepsilon^2 b \Delta_g u + a u &= u^p, \quad \text{in } M, \\ u &> 0, \quad \Delta_g u > 0, \quad \text{en } M, \end{aligned} \tag{3}$$

con $a, b > 0$ constantes, $p < p^* = \frac{n+4}{n-4}$, y $\Delta_g^2 := \Delta_g(\Delta_g)$ el operador bilaplaciano.

Gracias por la atención

¿Preguntas?