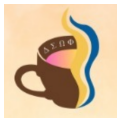


Existencia de una solución no trivial para una ecuación de tipo Schrödinger-Kirchhoff

Abraham Macancela
Kafeminario



September 29, 2023

- 1 Introducción
- 2 Preliminares
- 3 Existencia de solución

Consideramos el siguiente problema

$$\begin{cases} -(a + b([u]_s^p)^{p-1}) (-\Delta)_p^s u(x) + V(x)u^p(x) = f(x, u(x)), \\ |u(x)| \longrightarrow 0, \quad \text{as } |x| \longrightarrow \infty, \end{cases} \quad (\text{P})$$

donde $x \in \mathbb{R}^N$, $s \in (0, 1)$, $1 \leq p < +\infty$, $sp < N$, $a, b > 0$, $N \geq 2$,
 $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ y

(V) $V \in C(\mathbb{R}^N)$ y $\beta := \inf_{\mathbb{R}^N} V(x) > 0$.

Notese que $(-\Delta)_p^s$ denota al operador p-Laplaciano-Fraccionario, definido como:

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x, \varepsilon)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+ps}} dy \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

y $[u]_{s,p}^p$ representa la seminorma de Gagliardo

$$[u]_{s,p}^p = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy$$

El problema (P) es una generalización de la version estacionaria de

a) La ecuación no-lineal de Schödinger,

$$i\hbar u_t + \frac{\hbar^2}{2} \Delta u - V_0(x) u + f(x, u) = 0,$$

la cual aparece cuando se habla de la evolución del condensado de Bose-Einstein.

b) La ecuación de Kirchhoff,

$$u_{tt} - \left(a + b \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right) \right) \Delta u = f(x, u),$$

una ecuación de onda que considera los cambios de longitud, producido por vibraciones transversales, en una cuerda.

Se considera las siguientes condiciones para f :

(F1) Existen funciones positivas $M_1 \in L^{p/(p-r_1)}(\Omega)$ y $M_2 \in L^{p/(p-r_2)}(\Omega)$, tales que:

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} : \quad |f(x, t)| \leq r_1 M_1(x) |t|^{r_1-1} + r_2 M_2(x) |t|^{r_2-1},$$

para algún $1 < r_1 < r_2 < p$; y,

(F2) Existe $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto acotado, constantes $\delta, \eta > 0$ y $r_3 \in]1, p[$ tal que

$$\forall (x, t) \in \Omega \times [-\delta, \delta] : \quad F(x, t) \geq \eta |t|^{r_3},$$

donde $F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$.

Proposition

El funcional $\|\cdot\|_E : C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por:

$$\|u\|_E = \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^p dx \right)^{1/p}. \quad (1)$$

es una norma.

Definimos E como la completitud de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ con la norma $\|\cdot\|_E$, E es de Banach.

Theorem

Sea $s \in (0, 1)$ y $p \in [1, +\infty)$ tales que $sp < N$. El embedimiento

$$E \hookrightarrow L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^N)$$

es compacto para todo $q \in [p, p^*)$, donde $q \in [p, p^*]$, $p_s^* := \frac{pN}{N - ps}$.

Asociado al problema (P) tenemos el funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$I(u) = J(u) + G(u) + H(u) - W(u), \quad (2)$$

donde

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{a}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx, & G(u) &= \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^p dx \\ H(u) &= \frac{b}{p^2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx \right)^p, & W(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u(x)) dx. \end{aligned}$$

Theorem

El funcional I es de clase C^1 . Para todo $u, v \in E$, we have

$$\begin{aligned}\langle I'(u), v \rangle = & \left(a + b \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \right)^{p-1} \right) \\ & \times \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+ps}} dx dy \quad (3) \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u(x)) v(x) dx\end{aligned}$$

La demostración fue dividida en tres partes:

- 1) Mostrar que I esta bien definido.
- 2) Mostrar que cada termino de I es Gateaux diferenciable.
- 3) Mostrar que todos los diferenciales de Gateaux son continuos.

2) Sea $u, v \in E$ y $t \in \mathbb{R}$. Haciendo uso de

$$\left. \frac{d}{dt} I(u + th) \right|_{t=0},$$

calculamos $\partial_h I(u)$, para probar que es lineal-continua y concluir que es Gateaux diferenciable.

3) Tomamos $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $u_n \rightarrow u$ en E , tanto como $n \rightarrow +\infty$. Con lo cual se logra probar que

$$\|I'_G(u) - I'_G(u_{n_k})\| \rightarrow 0, \text{ as } k \rightarrow +\infty.$$

Teniendo que $I'_G(u_{n_k}) \rightarrow I'_G(u)$ en E' . Concluimos que I'_G es continuo, y por tanto I es diferenciable.

Definition

Un funcional $I \in C^1(X)$ satisface la condición de Palais-Smale (PS) si para toda sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tal que

- i) $(I(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada;*
- ii) $I'(u_n) \rightarrow 0$ tanto como $n \rightarrow \infty$,*

tiene una subsucesión convergente en X .

Decimos que el funcional I verifica la condición (PS) si para toda sucesión de Palais-Smale hay una subsucesión convergente.

Para probar la existencia de la solución para el problema (P) hacemos uso del siguiente resultado.

Theorem (Ambrosetti & Malchiodi [2])

Sea $I \in C^1(X)$ acotado inferiormente y que verifica la condición de (PS) . Entonces

$$c = \inf_{u \in X} I(u)$$

es un valor critico de I .

Ahora estamos en condiciones de presentar el resultado

Theorem (Existencia)

Asumiendo las condiciones (V), (F1) y (F2). El problema (P) tiene una solución no trivial

Sketch de la demostración:

1. I es acotado inferiormente
2. I satisface la condición de Palace-Smale
3. Mostrar que el punto c es no trivial.

1. Tenemos que para $u \in E$

$$\begin{aligned} I(u) &= J(u) + G(u) + H(u) - W(u) \\ &\geq \frac{1}{p} \min\{a, 1\} \|u\|_E^p - \sum_{k=1}^2 \theta^{-r_k/p} \|M_k\|_{L^{p/(p-r_k)}(\Omega)} \|u\|_p^{r_k}. \end{aligned} \quad (4)$$

Consiguiendo una cota inferior, mostrando que I es acotado inferiormente.

2. Sea $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $(I(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ es acotado y $I'(u_k) \rightarrow 0$ tanto como $k \rightarrow \infty$. Entonces existe una constante $C_I > 0$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad |I(u_k)| < C_I.$$

Usando que I es acotado inferiormente y (16), se prueba que la sucesión $(\|u_k\|_E)_{k \in \mathbb{N}}$ es acotada.

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad \|u_k\|_E \leq C_T.$$

Entonces existe una subsucesión debilmente convergente

$$u_k \rightharpoonup u_0 \quad \text{in } E$$

Pero nosotros nos enfocamos en probar que la subsucesión converge fuertemente. Entonces, haciendo uso de

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f(x, u_k(x)) - f(x, u_0(x)))(u_k(x) - u_0(x)) dx \rightarrow 0, \text{ as } k \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} & b \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_0(x) - u_0(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx \right)^{p-1} - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_k(x) - u_k(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx \right)^{p-1} \right] \\ & \times \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_0(x) - u_0(y)|^{p-2} (u_0(x) - u_0(y)) \cdot [(u_0(x) - u_0(y)) - (u_k(x) - u_k(y))]}{|x - y|^{N+ps}} \\ & \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

En algun punto de la demostración se separa en dos casos, cuando $p \geq 2$

$$\langle |b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b - a \rangle \geq 2^{2-p}|b - a|^p$$

y para cuando $1 < p < 2$

$$\langle |b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b - a \rangle \geq (p-1)(1 + |b|^2 + |a|^2)^{\frac{p-2}{2}} |b - a|^2$$

Afortunadamente, en ambos casos se llega a

$$u_k \rightarrow u_0, \quad \text{in } E$$

concluyendo que I satisface la condición de (PS)

Con el propósito de mostrar que u_* es un punto critico no trivial de I .
 Sea $u_0 \in C_0^\infty(\Omega) \setminus \{0\}$ y $s > 0$. Usando (F2), tenemos que

$$\begin{aligned} I(su_0) &\leq \frac{s^p}{p} \max\{a, 1\} \|u_0\|_E^p + \frac{bs^{p^2}}{p^2} \|u_0\|_E^{p^2} - \int_{\Omega} F(x, su_0(x)) dx \\ &\leq \frac{s^p}{p} \max\{a, 1\} \|u_0\|_E^p + \frac{bs^{p^2}}{p^2} \|u_0\|_E^{p^2} - \eta s^{r_3} \int_J |u_0(x)|^{r_3} dx. \end{aligned}$$

Dado que $1 < r_3 < p$, tenemos que $I(su_0) < 0$ para $s > 0$ suficientemente pequeño. Así, $I(u^*) = c \leq I(su_0) < 0$, por lo cual u^* es un punto critico no trivial de I .



Duan, L. and Huang, L.: *Infinitely many solutions for sublinear Schrödinger Kirchhoff type equations with general potentials*, Results Math. 66, 181-197 (2014).



Ambrosetti, A. and Malchiodi, A.: *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge University Press (2007).



Rabinowitz, P.: *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **65** (1986)



Brezis, H.; *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2011).



Felmer, P. and Mayorga, J.: *Multiplicity and concentration for the nonlinear Schrödinger equation with critical frequency*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications (2007).