

Método de elementos finitos para problemas de control óptimo

Daniel Quero

Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, Chile



Departamento de Matemática
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE
VALPARAÍSO



UNIVERSIDAD TÉCNICA
FEDERICO SANTA MARÍA



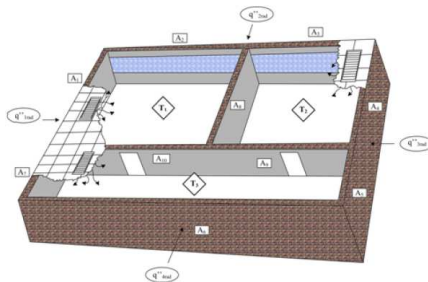
Universidad
de Valparaíso
CHILE

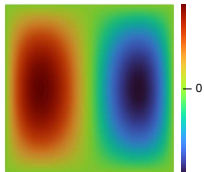
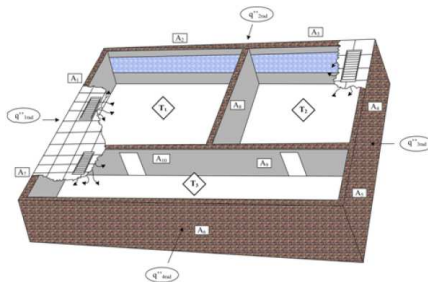
Financiado por ANID-Subdirección del Capital Humano/Doctorado Nacional/2021 -
21210988.

1 Control óptimo de temperatura

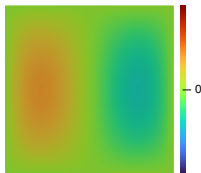
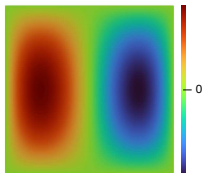
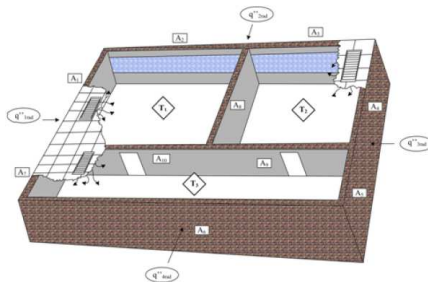
2 Problemas de estudio

3 References

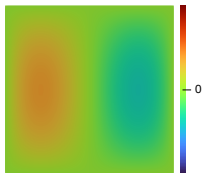
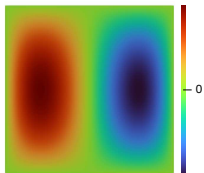
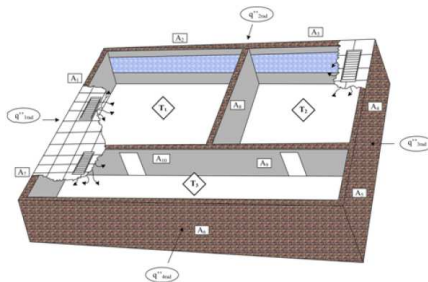




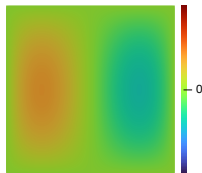
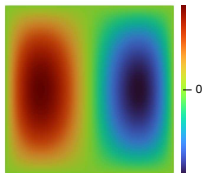
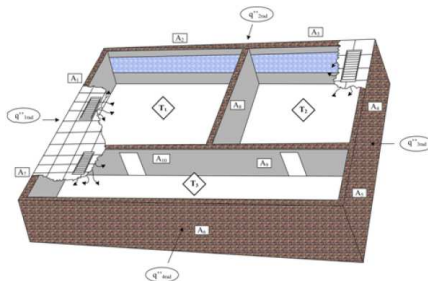
$$\begin{aligned} -\Delta T(x) &= f(x) & x \in \Omega, \\ T(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} -\Delta T(x) &= f(x) & x \in \Omega, \\ T(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$



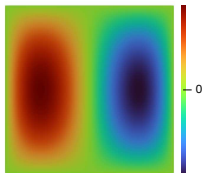
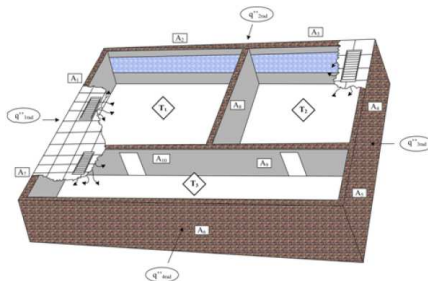
$$\begin{aligned} -\Delta T(x) &= f(x) & x \in \Omega, \\ T(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$



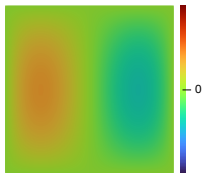
$$\begin{aligned} -\Delta T(x) &= f(x) & x \in \Omega, \\ T(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\Delta T(x) &= f(x) + q(x) & x \in \Omega, \\ T(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

$$\rightarrow T \approx T_D$$

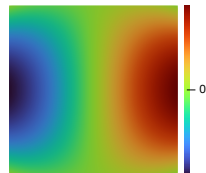


$$\begin{aligned} -\Delta T(x) &= f(x) & x \in \Omega, \\ T(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} -\Delta T(x) &= f(x) + q(x) & x \in \Omega, \\ T(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

$$\rightarrow T \approx T_D$$



$$q(x)$$

Control óptimo de temperatura

- Ω : dominio abierto y acotado,
- T_D : estado deseado,
- λ : parámetro de regularización,
- $a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$.

Control óptimo de temperatura

- Ω : dominio abierto y acotado,
- T_D : estado deseado,
- λ : parámetro de regularización,
- $a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$.

$$\min J(T, q) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |T(x) - T_D(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |q(x)|^2 dx$$

Control óptimo de temperatura

- Ω : dominio abierto y acotado,
- T_D : estado deseado,
- λ : parámetro de regularización,
- $a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$.

$$\min J(T, q) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |T(x) - T_D(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |q(x)|^2 dx$$

sujeto a

Ecuación de estado

$$\begin{aligned} -\Delta T(x) &= f(x) + q(x) & x \in \Omega, \\ T(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Control óptimo de temperatura

- Ω : dominio abierto y acotado,
- T_D : estado deseado,
- λ : parámetro de regularización,
- $a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$.

$$\min J(T, q) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |T(x) - T_D(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |q(x)|^2 dx$$

sujeto a

Ecuación de estado

$$\begin{aligned} -\Delta T(x) &= f(x) + q(x) & x \in \Omega, \\ T(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Restricción de caja

$$a \leq q(x) \leq b \quad \forall x \in \Omega$$

Control óptimo de temperatura

- Ω : dominio abierto y acotado,
- T_D : estado deseado,
- λ : parámetro de regularización,
- $a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$.

$$\min J(T, q) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |T(x) - T_D(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |q(x)|^2 dx$$

sujeto a

Ecuación de estado

$$\begin{aligned} -\Delta T(x) &= f(x) + q(x) & x \in \Omega, \\ T(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Restricción de caja

$$a \leq q(x) \leq b \quad \forall x \in \Omega$$

Variables

T : Estado, q : Control.

Control óptimo de temperatura

- Ω : dominio abierto y acotado,
- T_D : estado deseado,
- λ : parámetro de regularización,
- $a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$.

$$\min J(T, q) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |T(x) - T_D(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |q(x)|^2 dx$$

sujeto a

Ecuación de estado

$$\begin{aligned} -\Delta T(x) &= f(x) + q(x) & x \in \Omega, \\ T(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Restricción de caja

$$a \leq q(x) \leq b \quad \forall x \in \Omega$$

Objetivo

Analizar la discretización por elementos finitos.

1) Ecuación de estado

- Formulación variacional
- Existencia (y unicidad) de soluciones
- Regularidad
- **Discretización por elementos finitos**
- **Análisis de error**

2) Problema de control

- Formulación variacional
- Existencia (y unicidad) de soluciones

3) Caracterización de soluciones

- Condiciones de optimalidad (necesarias y suficientes)
- Regularidad adicional

4) **Discretización por elementos finitos**

1) Ecuación de estado

- Formulación variacional
- Existencia (y unicidad) de soluciones
- Regularidad
- **Discretización por elementos finitos**
- **Análisis de error**

2) Problema de control

- Formulación variacional
- Existencia (y unicidad) de soluciones

3) Caracterización de soluciones

- Condiciones de optimalidad (necesarias y suficientes)
- Regularidad adicional

4) Discretización por elementos finitos

Formulación variacional

$$\left. \begin{aligned} -\Delta T(x) &= f(x) & x \in \Omega, \\ T(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\}$$

Formulación variacional

$$\left. \begin{array}{lcl} -\Delta T(x) & = & f(x) \quad x \in \Omega, \\ T(x) & = & 0 \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\} \longrightarrow T \in \mathbb{V} : \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

1) Ecuación de estado

Formulación variacional

$$\left. \begin{array}{lcl} -\Delta T(x) & = & f(x) \quad x \in \Omega, \\ T(x) & = & 0 \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\} \longrightarrow T \in \mathbb{V} : \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

- $\mathbb{V} = H_0^1(\Omega) \longrightarrow$ Existencia y unicidad de soluciones (Lax - Milgram).

Formulación variacional

$$\left. \begin{array}{lcl} -\Delta T(x) & = & f(x) \quad x \in \Omega, \\ T(x) & = & 0 \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\} \longrightarrow T \in \mathbb{V} : \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

- $\mathbb{V} = H_0^1(\Omega) \longrightarrow$ Existencia y unicidad de soluciones (Lax - Milgram).
- Regularidad:
 - $f \in H^{-1}(\Omega) \implies T \in H_0^1(\Omega)$

1) Ecuación de estado

Formulación variacional

$$\left. \begin{array}{lcl} -\Delta T(x) & = & f(x) \quad x \in \Omega, \\ T(x) & = & 0 \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\} \longrightarrow T \in \mathbb{V} : \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

- $\mathbb{V} = H_0^1(\Omega) \longrightarrow$ Existencia y unicidad de soluciones (Lax - Milgram).
- Regularidad:
 - $f \in H^{-1}(\Omega) \implies T \in H_0^1(\Omega)$
 - $f \in L^2(\Omega) + \Omega$ convexo $\implies T \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \implies T \in C(\overline{\Omega})$.

Formulación variacional

$$\left. \begin{array}{lcl} -\Delta T(x) & = & f(x) \quad x \in \Omega, \\ T(x) & = & 0 \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\} \longrightarrow T \in \mathbb{V} : \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

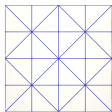
- $\mathbb{V} = H_0^1(\Omega) \longrightarrow$ Existencia y unicidad de soluciones (Lax - Milgram).
- Regularidad:
 - $f \in H^{-1}(\Omega) \implies T \in H_0^1(\Omega)$
 - $f \in L^2(\Omega) + \Omega$ convexo $\implies T \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \implies T \in C(\overline{\Omega})$.
- Discretización por elementos finitos: $T_h \in \mathbb{V}_h : \int_{\Omega} \nabla T_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h$.

1) Ecuación de estado

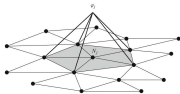
Formulación variacional

$$\left. \begin{aligned} -\Delta T(x) &= f(x) & x \in \Omega, \\ T(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \longrightarrow T \in \mathbb{V} : \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

- $\mathbb{V} = H_0^1(\Omega) \longrightarrow$ Existencia y unicidad de soluciones (Lax - Milgram).
- Regularidad:
 - $f \in H^{-1}(\Omega) \implies T \in H_0^1(\Omega)$
 - $f \in L^2(\Omega) + \Omega$ convexo $\implies T \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \implies T \in C(\overline{\Omega})$.
- **Discretización por elementos finitos:** $T_h \in \mathbb{V}_h : \int_{\Omega} \nabla T_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h.$



Partición $\mathcal{P}_h$



Espacio discreto $\mathbb{V}_h$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

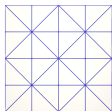
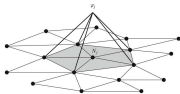
Sistema matricial

1) Ecuación de estado

Formulación variacional

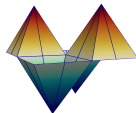
$$\left. \begin{array}{l} -\Delta T(x) = f(x) \quad x \in \Omega, \\ T(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\} \longrightarrow T \in \mathbb{V} : \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

- $\mathbb{V} = H_0^1(\Omega) \rightarrow$ Existencia y unicidad de soluciones (Lax - Milgram).
- Regularidad:
 - $f \in H^{-1}(\Omega) \implies T \in H_0^1(\Omega)$
 - $f \in L^2(\Omega) + \Omega$ convexo $\implies T \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \implies T \in C(\overline{\Omega})$.
- Discretización por elementos finitos: $T_h \in \mathbb{V}_h : \int_{\Omega} \nabla T_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h$.

Partición $\mathcal{P}_h$ Espacio discreto $\mathbb{V}_h$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Sistema matricial

Solución discreta T_h

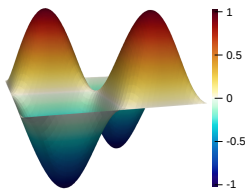
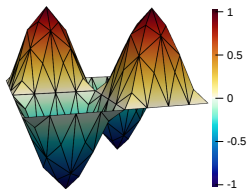
Análisis de error a priori

$$e = T - T_h,$$

$$|e|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\text{Ndofs})^{-\gamma} \quad (\gamma > 0)$$

Solución discreta

Solución exacta



Análisis de error a priori

$$e = T - T_h,$$

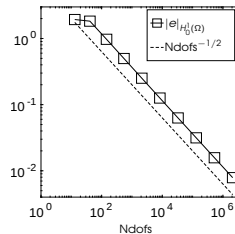
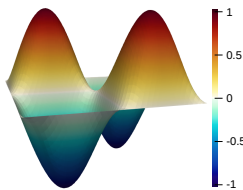
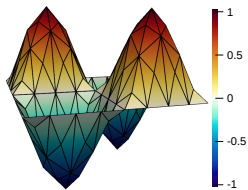
$$|e|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\text{Ndofs})^{-\gamma}$$

$$(\gamma > 0)$$

Solución discreta

Solución exacta

Error de aproximación



Análisis de error a priori

$$e = T - T_h,$$

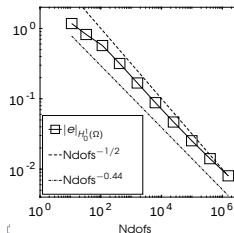
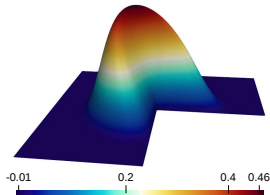
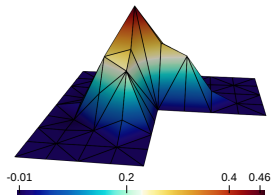
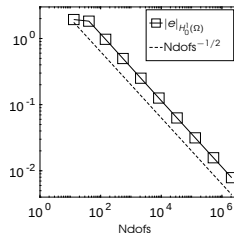
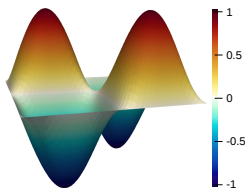
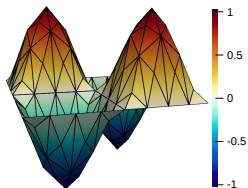
$$|e|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\text{Ndofs})^{-\gamma}$$

$$(\gamma > 0)$$

Solución discreta

Solución exacta

Error de aproximación



Objetivo

Diseñar un estimador $\eta = \eta(T_h)$ tal que:

Objetivo

Diseñar un estimador $\eta = \eta(T_h)$ tal que:

- $$\eta(T_h) = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_K(T_h),$$

Objetivo

Diseñar un estimador $\eta = \eta(T_h)$ tal que:

- $\eta(T_h) = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_K(T_h),$
- $|e|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{rel} \eta$

Objetivo

Diseñar un estimador $\eta = \eta(T_h)$ tal que:

- $\eta(T_h) = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_K(T_h),$
- $|e|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{rel}\eta \quad \longrightarrow \text{Confiabilidad}$

Objetivo

Diseñar un estimador $\eta = \eta(T_h)$ tal que:

- $\eta(T_h) = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_K(T_h),$
- $|e|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{rel} \eta \quad \longrightarrow \text{Confiabilidad}$
- $\sum_{K \in \mathcal{N}_K} \eta_K + \text{osc}_{\mathcal{N}_K}(f) \leq C_{eff} |e|_{H_0^1(\mathcal{N}_K)}$

Objetivo

Diseñar un estimador $\eta = \eta(T_h)$ tal que:

- $\eta(T_h) = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_K(T_h),$
- $|e|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{rel}\eta \quad \longrightarrow \text{Confiabilidad}$
- $\sum_{K \in \mathcal{N}_K} \eta_K + \text{osc}_{\mathcal{N}_K}(f) \leq C_{eff}|e|_{H_0^1(\mathcal{N}_K)} \quad \longrightarrow \text{Eficiencia}$

Objetivo

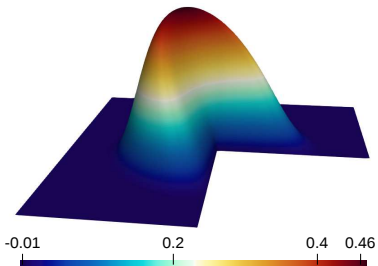
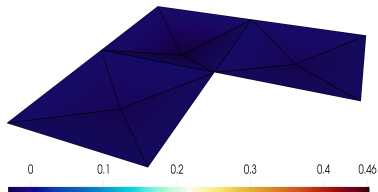
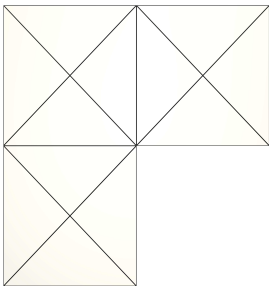
Diseñar un estimador $\eta = \eta(T_h)$ tal que:

- $\eta(T_h) = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_K(T_h),$
- $|e|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{rel}\eta \quad \longrightarrow \text{Confiabilidad}$
- $\sum_{K \in \mathcal{N}_K} \eta_K + \text{osc}_{\mathcal{N}_K}(f) \leq C_{eff}|e|_{H_0^1(\mathcal{N}_K)} \quad \longrightarrow \text{Eficiencia}$

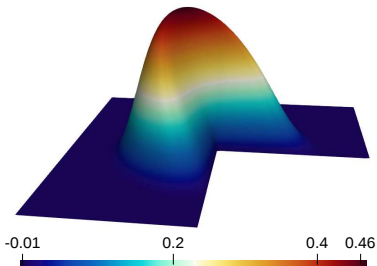
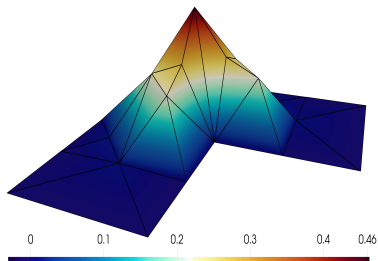
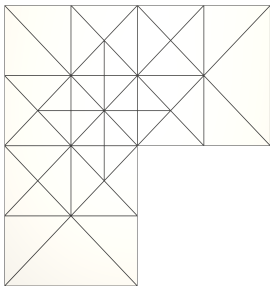
Algoritmo adaptativo

Resolver - Estimar - Marcar - Refinar

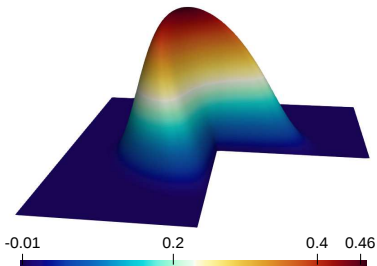
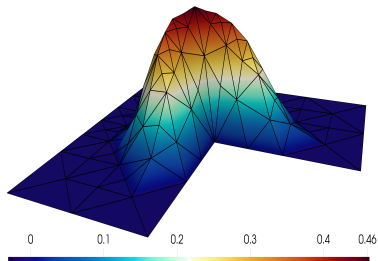
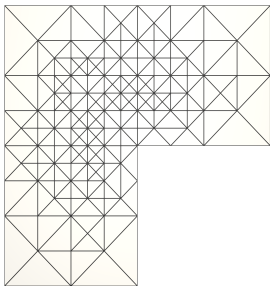
Análisis de error a posteriori



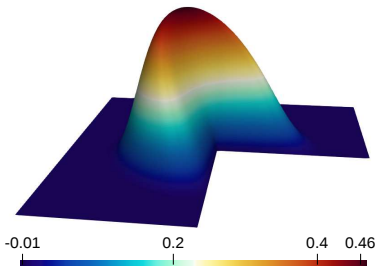
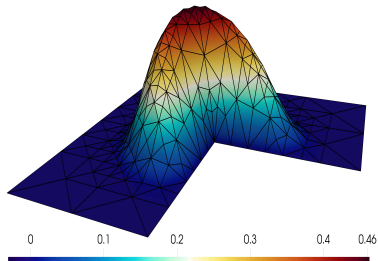
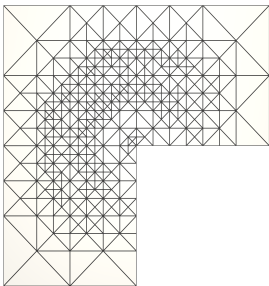
Análisis de error a posteriori



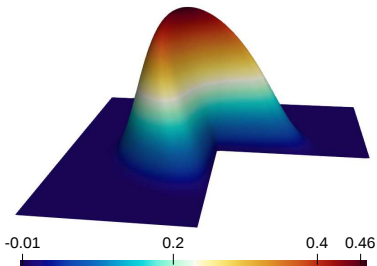
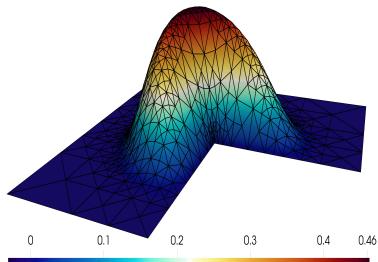
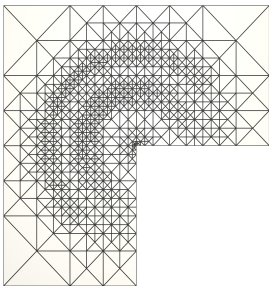
Análisis de error a posteriori

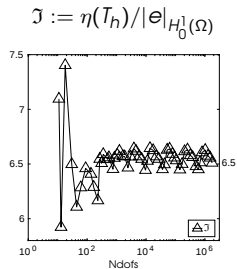
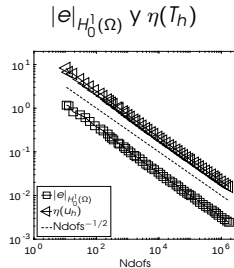
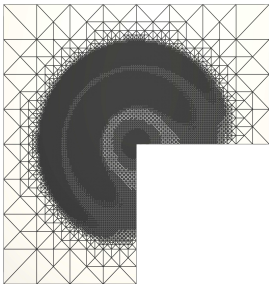


Análisis de error a posteriori



Análisis de error a posteriori





1) Ecuación de estado

- Formulación variacional
- Existencia (y unicidad) de soluciones
- Regularidad
- **Discretización por elementos finitos**
- **Análisis de error**

2) Problema de control

- Formulación variacional
- Existencia (y unicidad) de soluciones

3) Caracterización de soluciones

- Condiciones de optimalidad (necesarias y suficientes)
- Regularidad adicional

4) Discretización por elementos finitos

2) Problema de control óptimo

Formulación variacional

$$\min J(T, q) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |T(x) - T_D(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |q(x)|^2 dx$$

$$\text{sujeto a: } \begin{cases} T \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} (f + q)v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ q \in \mathbb{Q}_{ad} := \{w \in L^2(\Omega) : a \leq w(x) \leq b \text{ c.t.p. en } \Omega\}. \end{cases}$$

2) Problema de control óptimo

Formulación variacional

$$\min J(T, q) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |T(x) - T_D(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |q(x)|^2 dx$$

$$\text{sujeto a: } \begin{cases} T \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} (f + q)v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ q \in \mathbb{Q}_{ad} := \{w \in L^2(\Omega) : a \leq w(x) \leq b \text{ c.t.p. en } \Omega\}. \end{cases}$$

Cálculo variacional $\longrightarrow$ Existencia y unicidad de solución $(\bar{T}, \bar{q}) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{Q}_{ad}$.

2) Problema de control óptimo

Formulación variacional

$$\min J(T, q) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |T(x) - T_D(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |q(x)|^2 dx$$

$$\text{sujeto a: } \begin{cases} T \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} (f + q)v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ q \in \mathbb{Q}_{ad} := \{w \in L^2(\Omega) : a \leq w(x) \leq b \text{ c.t.p. en } \Omega\}. \end{cases}$$

Cálculo variacional $\longrightarrow$ Existencia y unicidad de solución $(\bar{T}, \bar{q}) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{Q}_{ad}$.

Idea: Optimizar y después discretizar

1) Ecuación de estado

- Formulación variacional
- Existencia (y unicidad) de soluciones
- Regularidad
- **Discretización por elementos finitos**
- **Análisis de error**

2) Problema de control

- Formulación variacional
- Existencia (y unicidad) de soluciones

3) **Caracterización de soluciones**

- Condiciones de optimalidad (necesarias y suficientes)
- Regularidad adicional

4) **Discretización por elementos finitos**

3) Caracterización de soluciones óptimas

Sistema de optimalidad

$$\langle D_q J(\bar{T}, \bar{q}), q - \bar{q} \rangle \geq 0 \quad \forall q \in \mathbb{Q}_{ad} \iff \left\{ \begin{array}{l} (\bar{T}, \bar{P}, \bar{q}) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times \mathbb{Q}_{ad} : \\ \int_{\Omega} \nabla \bar{T} \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (f + \bar{q})v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla \bar{P} \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (\bar{T} - T_D)v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} (\bar{P} + \lambda \bar{q}) \cdot (q - \bar{q}) \, dx \geq 0 \quad \forall q \in \mathbb{Q}_{ad}. \end{array} \right.$$

3) Caracterización de soluciones óptimas

Sistema de optimalidad

$$\langle D_q J(\bar{T}, \bar{q}), q - \bar{q} \rangle \geq 0 \quad \forall q \in \mathbb{Q}_{ad} \iff \left\{ \begin{array}{l} (\bar{T}, \bar{P}, \bar{q}) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times \mathbb{Q}_{ad} : \\ \int_{\Omega} \nabla \bar{T} \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (f + \bar{q})v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla \bar{P} \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (\bar{T} - T_D)v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} (\bar{P} + \lambda \bar{q}) \cdot (q - \bar{q}) \, dx \geq 0 \quad \forall q \in \mathbb{Q}_{ad}. \end{array} \right.$$

Fórmula de proyección

$$\bar{q}(x) = \Pi_{[a,b]} \left\{ -\frac{1}{\lambda} \bar{P}(x) \right\} = \min \left\{ b, \max \left\{ a, -\frac{1}{\lambda} \bar{P}(x) \right\} \right\}$$

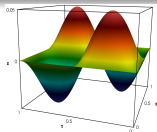
3) Caracterización de soluciones óptimas

Sistema de optimalidad

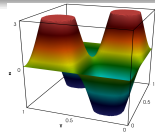
$$\langle D_q J(\bar{T}, \bar{q}), q - \bar{q} \rangle \geq 0 \quad \forall q \in \mathbb{Q}_{ad} \iff \left\{ \begin{array}{l} (\bar{T}, \bar{P}, \bar{q}) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times \mathbb{Q}_{ad} : \\ \int_{\Omega} \nabla \bar{T} \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (f + \bar{q})v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \nabla \bar{P} \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (\bar{T} - T_D)v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} (\bar{P} + \lambda \bar{q}) \cdot (q - \bar{q}) \, dx \geq 0 \quad \forall q \in \mathbb{Q}_{ad}. \end{array} \right.$$

Fórmula de proyección

$$\bar{q}(x) = \Pi_{[a,b]} \left\{ -\frac{1}{\lambda} \bar{P}(x) \right\} = \min \left\{ b, \max \left\{ a, -\frac{1}{\lambda} \bar{P}(x) \right\} \right\}$$



$\bar{P}$



1) Ecuación de estado

- Formulación variacional
- Existencia (y unicidad) de soluciones
- Regularidad
- **Discretización por elementos finitos**
- **Análisis de error**

2) Problema de control

- Formulación variacional
- Existencia (y unicidad) de soluciones

3) Caracterización de soluciones

- Condiciones de optimalidad (necesarias y suficientes)
- Regularidad adicional

4) Discretización por elementos finitos

4) Discretización por elementos finitos

Fully discrete scheme

$$(\bar{T}_h, \bar{P}_h, \bar{q}_h) \in \mathbb{V}_h \times \mathbb{V}_h \times \mathbb{Q}_{ad,h} :$$

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{T}_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} (f + \bar{q}_h) v_h \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h,$$

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{P}_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} (\bar{T}_h - T_D) v_h \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h,$$

$$\int_{\Omega} (\bar{P}_h + \lambda \bar{q}_h) \cdot (q_h - \bar{q}_h) \geq 0 \quad \forall q_h \in \mathbb{Q}_{ad,h}.$$

Semi discrete scheme

$$(\bar{T}_h, \bar{P}_h, \bar{g}) \in \mathbb{V}_h \times \mathbb{V}_h \times \mathbb{Q}_{ad} :$$

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{T}_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} (f + \bar{g}) v_h \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h,$$

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{P}_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} (\bar{T}_h - T_D) v_h \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h,$$

$$\int_{\Omega} (\bar{P}_h + \lambda \bar{g}) \cdot (q - \bar{g}) \geq 0 \quad \forall q \in \mathbb{Q}_{ad}.$$

4) Discretización por elementos finitos

Fully discrete scheme

$$(\bar{T}_h, \bar{P}_h, \bar{q}_h) \in \mathbb{V}_h \times \mathbb{V}_h \times \mathbb{Q}_{ad,h} :$$

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{T}_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} (f + \bar{q}_h) v_h \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h,$$

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{P}_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} (\bar{T}_h - T_D) v_h \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h,$$

$$\int_{\Omega} (\bar{P}_h + \lambda \bar{q}_h) \cdot (q_h - \bar{q}_h) \geq 0 \quad \forall q_h \in \mathbb{Q}_{ad,h}.$$

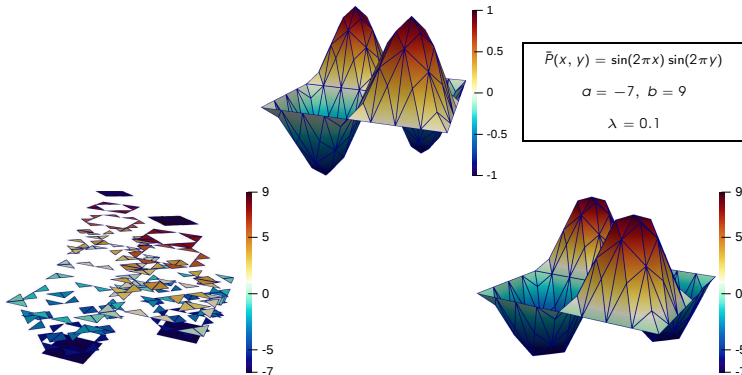
Semi discrete scheme

$$(\bar{T}_h, \bar{P}_h, \bar{g}) \in \mathbb{V}_h \times \mathbb{V}_h \times \mathbb{Q}_{ad} :$$

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{T}_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} (f + \bar{g}) v_h \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h,$$

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{P}_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} (\bar{T}_h - T_D) v_h \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h,$$

$$\int_{\Omega} (\bar{P}_h + \lambda \bar{g}) \cdot (q - \bar{g}) \geq 0 \quad \forall q \in \mathbb{Q}_{ad}.$$



4) Discretización por elementos finitos

Fully discrete scheme

$$(\bar{T}_h, \bar{P}_h, \bar{q}_h) \in \mathbb{V}_h \times \mathbb{V}_h \times \mathbb{Q}_{ad,h} :$$

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{T}_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} (f + \bar{q}_h) v_h \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h,$$

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{P}_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} (\bar{T}_h - T_D) v_h \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h,$$

$$\int_{\Omega} (\bar{P}_h + \lambda \bar{q}_h) \cdot (q_h - \bar{q}_h) \geq 0 \quad \forall q_h \in \mathbb{Q}_{ad,h}.$$

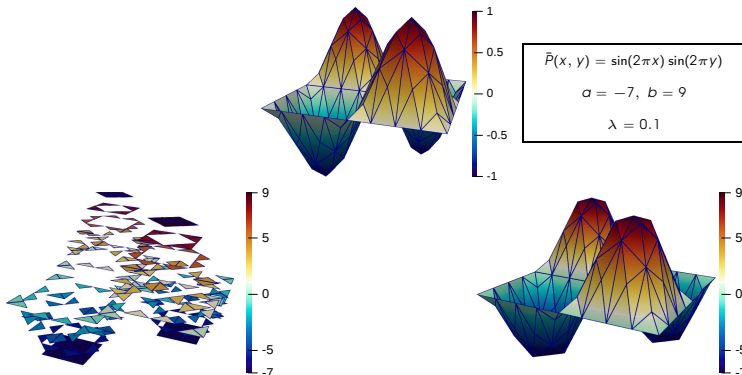
Semi discrete scheme

$$(\bar{T}_h, \bar{P}_h, \bar{g}) \in \mathbb{V}_h \times \mathbb{V}_h \times \mathbb{Q}_{ad} :$$

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{T}_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} (f + \bar{g}) v_h \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h,$$

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{P}_h \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} (\bar{T}_h - T_D) v_h \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h,$$

$$\bar{g} = \Pi_{[a,b]} \left\{ -\frac{1}{\lambda} \bar{P}_h \right\}.$$



Problemas de control óptimo con restricciones

$$\min\{J(y, u) : y \in \mathbb{Y}, u \in \mathbb{U}\} \text{ sujeto a } e(y, u) = 0, \quad u \in \mathbb{U}_{ad}.$$

- $\mathbb{Y}, \mathbb{U}$: espacios de funciones.
- y, u : Variables de estado y de control, respectivamente.
- $J : \mathbb{Y} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$: funcional de costo.
- $e(y, u)$: ecuacione de estado.
- $\mathbb{U}_{ad} \subset \mathbb{U}$: Conjunto admisible.

Problemas de control óptimo con restricciones

$$\min\{J(y, u) : y \in \mathbb{Y}, u \in \mathbb{U}\} \quad \text{sujeto a} \quad e(y, u) = 0, \quad u \in \mathbb{U}_{ad}.$$

- $\mathbb{Y}, \mathbb{U}$: espacios de funciones.
- y, u : Variables de estado y de control, respectivamente.
- $J : \mathbb{Y} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$: funcional de costo.
- $e(y, u)$: ecuacione de estado.
- $\mathbb{U}_{ad} \subset \mathbb{U}$: Conjunto admisible.

1) Ecuación de estado

- Formulación variacional
- Existencia (y unicidad) de soluciones
- Regularidad
- **Discretización por elementos finitos**
- **Análisis de error**

2) Problema de control

- Formulación variacional
- Existencia (y unicidad) de soluciones

3) Caracterización de soluciones

- Condiciones de optimalidad (necesarias y suficientes)
- Regularidad adicional

4) Discretización por elementos finitos

Control óptimo de un problema semilineal

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y(x) - y_{\Omega}(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx$$

sujeto a

Ecuación de estado

$$\begin{aligned} -\Delta y(x) + \alpha(x, y(x)) &= u(x) + f(x) & x \in \Omega, \\ y(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

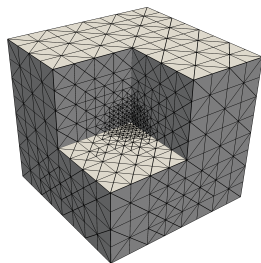
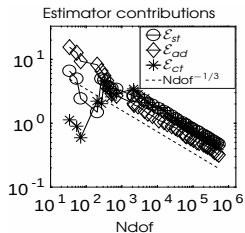
Restricción de caja

$$a \leq u(x) \leq b \quad \forall x \in \Omega$$

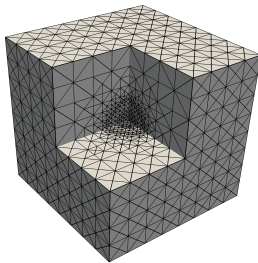
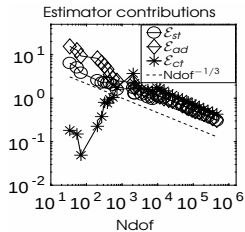
Problema no convexo $\implies$ no unicidad

A. ALLENDES, F. FUICA, E. OTÁROLA, AND D. QUERO, *A posteriori error estimates for semilinear optimal control problems*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal., 55 (2021), pp. 2293–2322.

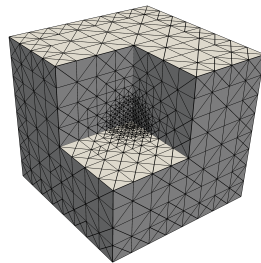
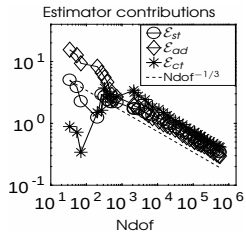
$$a(x, y) = 10y^3 - 2$$



$$a(x, y) = 10 \arctan(80y) - 5$$



$$a(x, y) = 10 \sinh(3y) - 2$$



$$\min J(\mathbf{y}, \mathbf{u}) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}_{\Omega}(x)|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}(x)|^2$$

sujeto a

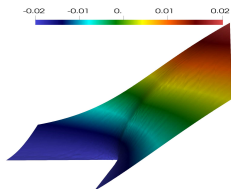
Sistema de Navier-Stokes

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{y} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} + \nabla p = \mathbf{u}, & \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{y} = \mathbf{0} & & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

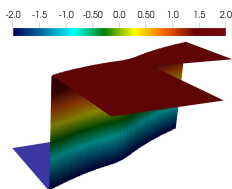
Restricción de caja

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{b} \quad \text{en } \Omega.$$

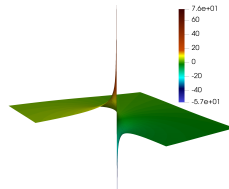
A. ALLENDES, F. FUICA, E. OTAROLA, AND D. QUERO, *A posteriori error estimates for a distributed optimal control problem of the stationary Navier-Stokes equations*, SIAM J. Control Optim., 59 (2021), pp. 2898–2923.



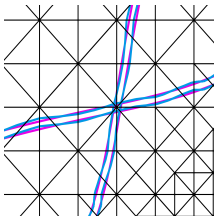
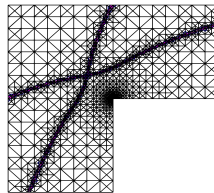
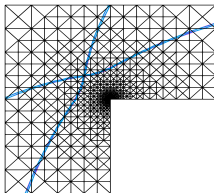
Estado y Estado adjunto



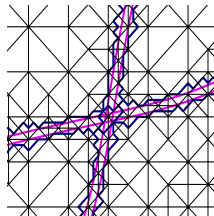
Control



Presión



Esquema semi discreto



Esquema completamente discreto

Problema de seguimiento puntual para el problema de Stokes

$$\min J(\mathbf{y}, \mathbf{u}) := \frac{1}{2} \sum_{t \in \mathcal{D}} |\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_t|^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}(x)|^2$$

sujeto a

Sistema de Stokes

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{y} + \nabla p &= \mathbf{u}, & \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{0} & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Restricción de caja

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{b} \quad \text{en } \Omega.$$

Problema adjunto singular

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{z} + \nabla r &= \sum_{t \in \mathcal{D}} (\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_t) \delta_t, & \nabla \cdot \mathbf{z} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{z} &= \mathbf{0} & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Problema de seguimiento puntual para el problema de Stokes

$$\min J(\mathbf{y}, \mathbf{u}) := \frac{1}{2} \sum_{t \in \mathcal{D}} |\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_t|^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}(x)|^2$$

sujeto a

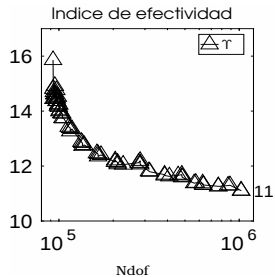
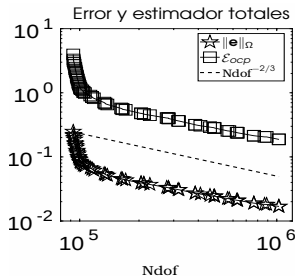
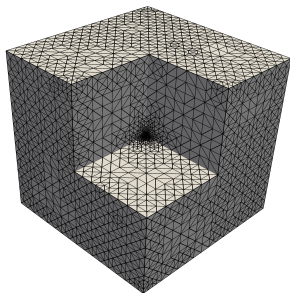
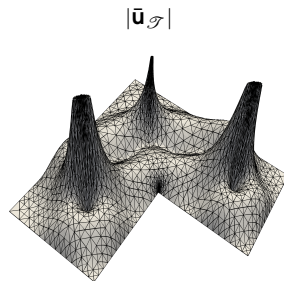
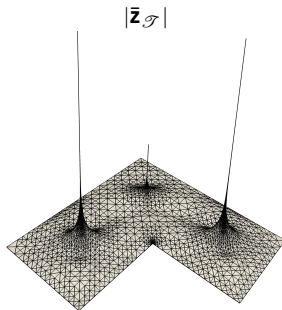
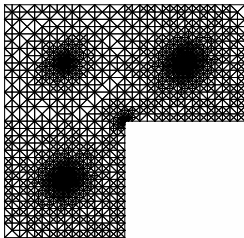
Sistema de Stokes

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{y} + \nabla p &= \mathbf{u}, & \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{0} & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Restricción de caja

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{b} \quad \text{en } \Omega.$$

- A. ALLENDES, F. FUICA, E. OTÁROLA, AND D. QUERO, *An adaptive finite element method for the pointwise tracking optimal control problem of the Stokes equations*. SIAM J. Sci. Comput. 41 (2019), no. 5, A2967–A2998.
- F. FUICA, E. OTÁROLA, AND D. QUERO, *Error estimates for optimal control problems of the Stokes system with dirac measures*. J. Sci. Comput. 87 (2021), no. 3, Paper No. 97, 23 pp.



Control óptimo de Navier-Stokes con fuentes singulares

$$\min J(\mathbf{y}, \mathcal{U}) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}_{\Omega}(x)|^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{t \in \mathcal{D}} |\mathbf{u}_t|^2, \quad \mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{\ell}) \in [\mathbb{R}^2]^{\ell},$$

sujeito a

Sistema de Navier-Stokes

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{y} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y} + \nabla p &= \sum_{t \in \mathcal{D}} \mathbf{u}_t \delta_t, & \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{0} & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Restricción de caja

$$\mathbf{a}_t \leq \mathbf{u}_t \leq \mathbf{b}_t \quad \forall t \in \mathcal{D}.$$

F. FUICA, F. LEPE, E. OTÁROLA, AND D. QUERO, *An optimal control problem for the Navier-Stokes equations with point sources*, J. Optim. Theory Appl., 196 (2023), pp. 590–616.

$$\min J(u, q) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x) - u_{\Omega}(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |q(x)|^2 dx$$

sujeto a

Ecuación de estado

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x) + q(x)u(x) &= f(x) & x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 & x \in \partial\Omega^c \end{aligned}$$

Restricción de caja

$$a \leq q(x) \leq b \quad \forall x \in \Omega$$

Problema no convexo y no local

F. BERSETCHE, F. FUICA, E. OTÁROLA, AND D. QUERO, *Bilinear optimal control of fractional Laplacian: Error estimates on Lipschitz domains*, SIAM Journal of Numerical Analysis (En revisión). arxiv.org/abs/2301.13058.

Control sparse del Laplaciano Fraccionario semilineal

$$\min J(u, q) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x) - u_{\Omega}(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |q(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |q(x)| dx$$

sujeto a

Ecuación de estado

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x) + a(x, u(x)) &= q(x) & x \in \Omega, \\ u(x) &= 0 & x \in \partial\Omega^c \end{aligned}$$

Restricción de caja

$$a \leq q(x) \leq b \quad \forall x \in \Omega$$

Problema no convexo, no local y no diferenciable

F. BERSETCHE, F. FUICA, E. OTÁROLA, AND D. QUERO, *Sparse optimal control of a fractional semilinear problem: convergence and error analysis on Lipschitz domains* (En preparación).

- Problema de control óptimo temporal.
- Control óptimo en la frontera.
- Control óptimo sobre problemas acoplados: Boussinesq, Stokes-Darcy, Maxwell,...
- Control óptimo sobre problemas perturbados.
- Optimización de forma.
- Otros métodos numéricos: VEM, DPG, Machine Learning,...



S. C. BRENNER AND L. R. SCOTT, *The mathematical theory of finite element methods*, vol. 15 of Texts in Applied Mathematics, Springer, New York, third ed., 2008.



J. C. De los Reyes. *Numerical PDE-constrained optimization*. Springer Briefs in Optimization, 2015.



A. ERN AND J.-L. GUERMOND, *Theory and practice of finite elements*, vol. 159 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 2004.



M. G. Larson and F. Bengzon, *The finite element method: theory, implementation, and applications*, vol. 10 of Texts in Computational Science and Engineering, Springer, Heidelberg, 2013.



F. TRÖLTZSCH, *Optimal control of partial differential equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, Volume 112, 2010.



R. VERFÜRTH, *A posteriori error estimation techniques for finite element methods*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, Oxford, 2013,

Gracias por su atención